

## مطالعه ارتعاشات آزاد پوسته‌های چندلایه استوانه‌ای شامل لایه‌ی پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده

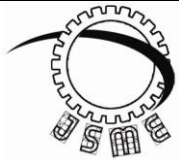
مصطفی معطری<sup>۱</sup>، فرزانه براتی<sup>۲\*</sup>

\* نویسنده مسئول: farzanbarati@yahoo.com, farzanbarati104@gmail.com

واژه‌های کلیدی	چکیده
ارتعاشات آزاد، لمینیت، پیزوالکتریک، کرنش صفحه‌ای، سری فوریه.	در این پژوهش، به مطالعه و حل دقیق ارتعاشات آزاد پوسته‌های چندلایه استوانه‌ای پرداخته شده است. لایه‌ها از نوع زاویه‌ای بوده و با زوایای مختلف نسبت به هم قرار گرفته‌اند. در سطح خارجی پوسته چندلایه استوانه‌ای، یک لایه پیزوالکتریک قرار گرفته است که به منظور تحریک مناسب در راستای شعاعی قطبیده شده است. پوسته طویل بوده و با فرض کرنش صفحه‌ای بصورت دوبعدی تحلیل می‌گردد. متغیرها در هر لایه برای برآورده کردن شرایط مرزی که شامل تکیه‌گاههای ساده در لبه‌ها می‌باشند بر حسب سری‌های فوریه بسط داده شده‌اند. معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی در راستای ضخامت تقلیل پیدا می‌کنند سپس از روش سری با تابع توانی برای حل این معادلات که منجر به یک پاسخ دقیق و همگرایی سریعتر می‌شود استفاده می‌گردد و ضرایب مجهول پاسخ ارتعاشی با روش ماتریس انتقال بدست می‌آیند. نتایج برای فرکانس طبیعی پوسته چندلایه استوانه‌ای در هفت مود اول و در دو حالت تک‌لایه‌ی پیزوالکتریک و پوسته پنج لایه در انتها و شکل کلی پاسخ متغیرهای نظیر جابجایی، تنش‌ها و کرنش‌های اصلی بدست آمده است.
تاریخ ارسال: ۹۴/۱۱/۰۲	
تاریخ بازنگری: ۹۵/۰۱/۰۲	
تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۲/۲۹	

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران.

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران.



Journal of  
Solid Mechanics  
in Engineering

# Journal of Solid Mechanics in Engineering

<http://jsme.iaukhsh.ac.ir>



## Free vibration study of simply supported cylindrical laminated panels with piezoelectric layer

Mostafa Moattari<sup>1</sup>, Farzan Barati<sup>2,\*</sup>

\* Corresponding Author: farzanbarati104 @gmail.com, farzanbarati@yahoo.com

---

### Abstract:

In the present study, vibration of cylindrical laminates with different layers and angles were studied. In order to actuate and polarize in radial direction, a piezoelectric layer was located at outer surface of composite shell. Laminates were assumed long enough so that plane strain state analysis in 2D can be used properly. In order to satisfy the boundary conditions, variables in terms of Fourier series were obtained. The governing equations reduced to ordinary differential equations at thickness direction and by power series method, the exact solution equations were obtained, unknown coefficient were calculated with rapid convergence. By using the matrix transfer method, vibration response of composite shell was obtained. Finally, results for the first seven modes of natural frequency of multi-layer cylindrical shells were obtained. In addition, for both state of one single piezoelectric layer and five layer shell at the end, some responses such as displacement, principal stress and strain were achieved.

---

---

### Key words:

Free vibration,  
Laminate,  
Piezoelectric,  
Plane strain,  
Fourier series.

---

---

1- MSc Student, Department of Mechanical Engineering, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Iran.

2- Assistant Prof., Department of Mechanical Engineering, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Iran.

## ۱- مقدمه

های لایه‌ای می‌باشد مورد نیاز است. از جمله مزیت‌های پوسته چندلایه‌ای به همراه پیژوالکتریک رسیدن به کرنش-هایی به مراتب بالاتر از حالت تک-مؤلفه‌ای با اعمال ولتاژی کمتر از ۲۰۰ ولت می‌باشد. در نتیجه جهت رسیدن به یک دامنه حرکتی بزرگ در سیستم‌های هوشمند بواسطه پیژوالکتریک، استفاده از ساختار لایه‌ای ساندویچی امری مورد نیاز می‌باشد و علت آن در این است که انقباض پیژوالکتریک در اثر میدان الکتریکی از خمش لایه‌های کامپوزیت جلوگیری می‌کند [۲]. در مودهای ابتدایی ارتعاشات ورق‌ها شکلی شبیه قله‌های سینوس و کسینوس داشته به همین دلیل بصورت توابعی از سینوس و کسینوس تخمین زده می‌شود. کرنش صفحه‌ای تعمیم داده شده برای هر لایه بصورت سری‌های فوریه در محدوده مختصات برای ارضا کردن شرایط مرزی در لبه‌ها بسط داده شده است، در نتیجه معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول نوع اولر-کوشی<sup>۴</sup> با ضرایب متغیر در راستای ضخامت تقلیل پیدا می‌کند که با استفاده از روش فروبنیوس اصلاح شده<sup>۵</sup> تحلیل می‌گردد. این روش مبتنی بر تابع نمایی و سری-های توانی استوار می‌باشد. در ادامه معادلات مومنتوم و توازن بار یک ماتریس  $8 \times 8$  بر حسب نمای ترم نمایی با هشت مقدار و بردار ویژه و یک رابطه بازگشتی برای ضرایب سری توانی را بدست می‌دهد. پاسخ عمومی برای هر لایه بر حسب ترم‌های هشت متغیر اصلی در پایین لایه بسط داده شده‌اند. با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی در فصل مشترک بین لایه‌ها، یک ماتریس انتقال پوسته برای ایجاد ارتباط بین متغیرهای اصلی در پایین و بالای سطوح تعریف می‌شود. ثوابت مجهول با استفاده از روش ماتریس انتقال تعیین شده که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند. گرچه بدست آوردن یک رابطه کلی برای پدیده ارتعاشات همواره مطلوب بوده لیکن در اینجا به علت پیچیدگی بسیار بالای معادلات امکان رسیدن به پاسخی کلی را تقریباً غیرممکن نموده و به نتایج عددی به منظور تایید تحلیل اتکا گردیده است. درحقیقت با استفاده از تئوری پیژوالاستیسته راه‌حل‌های دقیق و مناسبی دقیقی برای پوسته-

استفاده از ورق‌های ساندویچی و کامپوزیت با لایه‌ی محرک و سنسورهای پیژوالکتریک<sup>۱</sup> سبک در انواع سازه‌ها رو به گسترش است. مواد هوشمند جایگزین مناسبی برای بسیاری از نقایص مواد همگن فلزی و غیرفلزی است. پیژوالکتریک دارای ساختاری هوشمند بوده که تحت اثر میدان الکتریکی دچار کرنش شده و در حالت عکس این مطلب میدان کوپله الکتروالاستیک را ایجاد می‌کند. این مواد هوشمند را می‌توان به دو گروه اصلی تقسیم نمود: کریستال‌ها و سرامیک‌ها. شناخته‌شده‌ترین و معروف‌ترین مواد پیژوالکتریک در گروه کریستالها کوارتز می‌باشد و در گروه دیگر، تیتانات باریم<sup>۲</sup> از جمله انواع پرکاربرد این مواد می‌باشد [۱].

از سازه‌های کامپوزیتی با محرک پیژوالکتریک در صنایع هوافضا، سازه‌های فضایی، خودروسازی و کشتی-سازی استفاده می‌گردد. در صنعت پل‌سازی از سنسورهای پیژوسرامیک به منظور تعیین میزان فرکانس در اثر محرک-هایی نظیر باد استفاده می‌شود، همچنین فرآیند تست التراسونیک<sup>۳</sup> یکی از روش‌های تایید شده در تست عیوب جوشکاری از جمله تخلخل می‌باشد که امواج پس از برخورد به حفره در عمق جوش به سنسور پیژوسرامیک برخورد نموده که پس از ارتعاش موجب ایجاد آشفتگی در نمایشگر دستگاه می‌شوند که هدف از مطالعه حاضر نیز بررسی تخریب ناشی از ارتعاشات لایه‌ی پیژوالکتریک در چنین تستی می‌باشد. در موارد ذکر شده، ساختمانی مشتمل بر کامپوزیت و پوسته‌های چندلایه‌ای مکمل مناسبی برای عکس‌العمل ماده پیژوالکتریک تحت اثر میدان الکتریکی می‌باشد، ماده تک-مؤلفه پیژوالکتریک برای اینکه جابجایی برابر با ۱۰ الی ۱۰۰ میکرومتر بدست دهد باید تحت یک میدان الکتریکی برابر با ۲ کیلوولت بر میلیمتر قرار گیرد. جهت جبران این محدودیت، به ساختاری چند مؤلفه‌ای جهت تغییر شکل‌های خمشی-کششی که همان کامپوزیت-

1-Actuator

2-Barium Titanate (BaTiO3)

3-Ultrasonic test

4-Euler-Cauchy

5-Modified frobenius

های کامپوزیتی بدست آمده است که البته فرض پیوستگی بین لایه‌ها بخشی جدایی‌ناپذیر از آن می‌باشد. تحلیل برای تک مولفه پیزوالکتریک و همچنین پوسته چندلایه زاویه‌ای متقارن شامل پنج لایه و یک لایه پیزوالکتریک بر روی سطح بالایی ساندویچ پل مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد که جنس پیزوالکتریک در هر دو حالت یکسان است. در نهایت نتایج عددی بدست آمده برای فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده با مقادیر تحلیلی انجام گرفته بر اساس روش لایروایز<sup>۱</sup> که توسط چن و لی انجام گرفته [۳] مقایسه می‌گردد و انطباق آن بررسی می‌گردد.

حل دقیق فضای سه‌بعدی ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیت با چینش لایه‌ای متقاطع با تکیه‌گاه‌های ساده و شرایط مرزی مختص به خود توسط سرنیواس و رائو [۴] ارائه شد. توضیحات داخل شکل (۱) معرف مشخصات این لایه‌ها هستند که به صورت پارامتر تعریف شده است. ادلمن و استاوسکای [۵] ارتعاشات شعاعی پیزوسرامیک‌های استوانه‌ای قطبیده شده در جهت محوری را مطالعه کردند. چو و همکاران [۶] ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی چندلایه را توسط تئوری لایه منفرد مرتبه بالاتر مطالعه نمودند. چن و شن [۷ تا ۸] روش سری‌های توانی را برای رسیدن به پاسخی با استفاده از تئوری پیزوالاستیسیته سه‌بعدی برای حالت استاتیکی متقارن و ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای بکار بردند و فرکانس‌های آن را تعیین کردند. باترا و آیمانی [۹] پاسخی دقیق برای فرکانس‌های از دست رفته موده‌های قبلی در ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده بدست آورد. آیدوگدو و تیمارچی [۱۰] ارتعاشات ورق‌های مربعی با چیدمان لایه‌ای بصورت متقاطع با شرایط مرزی مختلف تحلیل نمود. لیو و همکاران [۱۱] ارتعاشات آزاد ورق‌های چندلایه متقارن را بر اساس روش تئوری تغییرشکل برشی<sup>۲</sup> با استفاده از تکنیک مؤثر حداقل مربعات تحلیل نمودند. کانگ و شیم [۱۲] حل دقیق و قابل قبولی برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی با مومنتوم در صفحه با تکیه‌گاه‌های ساده در دولبه مخالف را بررسی نمود. چن و

لی [۱۳ تا ۱۴] پاسخ دوبعدی و تحلیلی تقریبی برای پاسخ استاتیکی و ارتعاشی پوسته‌های چندلایه استوانه‌ای از نوع زاویه‌ای با روش لایروایز ارائه نمودند. در این روش هر لایه از پوسته به چند زیرلایه که برای هر کدام یک لایه‌ی میانی در نظر گرفته می‌شود تقسیم می‌گردد. معادلات دیفرانسیل برای لایه‌های میانی استخراج شده و ثوابت معادلات تقریب زده می‌شوند. کرمی و همکاران [۱۵] ارتعاشات آزاد ورق‌های چندلایه متقارن با ضخامتی ملایم و لبه‌هایی مقید شده بر روی بستر الاستیک را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. شیمپی و پاتل [۱۶] تئوری ورق دو متغیره را برای ارتعاشات آزاد ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک ارائه کرد. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیت مستطیلی با روش اجزاء محدود توسط پاندیت و همکاران [۱۷] انجام پذیرفت و مثال‌های عددی از ورق‌های کامپوزیتی و ایزوتروپیک مستطیلی برای زوایای مختلف چرخش الیاف و نسبت‌های مختلف اندازه و ضخامت حل گردید. تعدادی از محققین روی ارتعاشات پل‌های لایه‌ای کار کرده‌اند، در این میان سیوالک [۱۸] تکنیک کانولوشن<sup>۳</sup> گسسته یکتا را برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیت چندلایه متقارن از نظر چینش لایه‌ها و نسبتاً ضخیم بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پیشنهاد نمود و سپس نتایج بدست آمده با سایر روش‌ها از تحلیل و روش عددی مقایسه کرد. برتی [۱۹] ارتعاشات آزاد یک ورق کامپوزیت چندلایه متقارن نامتقارن را با برشی ایجاد شده در مرکز آن را مورد مطالعه قرار داد. اینگو-کنگ و همکارانش [۲۰] روش منظم تابع مبنای شعاعی را برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیت چندلایه با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به کار بردند. مسینا [۲۱] تأثیر شرایط مرزی تکیه-گاهی را بر روی ارتعاشات آزاد سه‌بعدی ورق‌های مستطیلی و چندلایه ایزوتروپیک با چینش متقاطع را نشان داد. ژیانگ و همکارانش [۲۲] ویژگی‌های ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی چندلایه را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول را بررسی کردند و تکنیک هموارسازی یکپارچه

1-Layerwise method  
2-Shear deformation theory

3-Convolution technique

عمود بر الیاف رفتار ارتوتروپیک مشاهده می‌گردد. ضریب الاستیسیته در این سه راستا، جهت تعیین خواص مکانیکی لایه مورد نیاز است. نیروی برشی در جهت محور  $\theta, z$  صفر در نظر گرفته می‌شوند که علت آن چسبندگی قابل توجه در بین لایه‌ها بوده که مانع عدم حرکت نسبی لایه‌ها نسبت به یکدیگر می‌گردد.

### ۳- معادلات

روابط کرنش در مختصات استوانه‌ای توسط تئوری الاستیسیته بیان می‌شود. معادله‌ی جابجایی برای پوسته چندلایه در مختصات استوانه‌ای بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^3 u_i \hat{e}_i \quad (1)$$

روابط برای کرنش‌های اصلی و برشی را می‌توان بصورت زیر بیان نمود [۲۴]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \quad (2)$$

در راستای محور  $z$  با فرض طولیل بودن پوسته مقدار کرنش صفر شده و فرض کرنش صفحه‌ای برقرار است. در بحث الکتریسیته رابطه‌ی بزرگی میدان الکتریکی با پتانسیل الکتریکی بصورت زیر برقرار است:

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (3)$$

روابط (۲) و (۳) بطور مجزا از ویژگی‌های میدان الاستیسیته و الکتریسیته هستند در بحث پوسته‌های چندلایه که شامل لایه‌ی پیزوالکتریک می‌شود میدان کوپله الکتروالاستیسیته ایجاد شده که روابط (۴) و (۵) فضای کوپل باید تعریف گردند. روابط (۴) و (۵) فضای کوپل مورد نظر را ایجاد می‌کند [۲۵]:

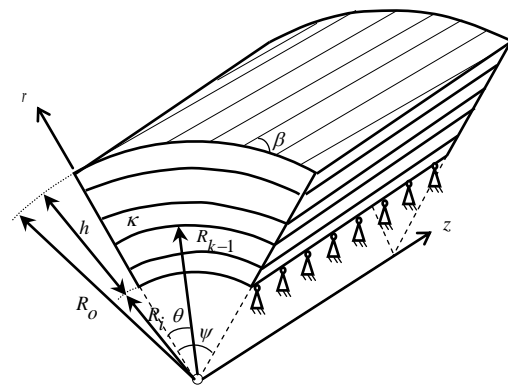
$$\varepsilon_{kl} = \bar{S}_{ijkl} \sigma_{ij} + \bar{d}_{kl} E_k \quad (4)$$

$$D_i = \bar{d}_{ij} \sigma_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij} \phi_{,i} \quad (5)$$

فاقد مش را مبنای تحلیل ورق‌های نازک قرار دادند. بوسکولو و بانرجی [۲۳] با استفاده از تکنیک سختی دینامیکی توسعه یافته با استفاده از روش پیچیده لایروایز و دقت بالایی ورق‌های کامپوزیت چندلایه را تحلیل کردند. در تحقیق حاضر، قطاع کامپوزیت در لبه‌ها به تکیه‌گاه ساده مقید شده است. طول پوسته را طولیل در نظر گرفته به صورتی که می‌توان آن را بینهایت فرض نمود، همچنین با توجه به سوابق ذکر شده و عدم بررسی روش سری توانی اصلاح شده در تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای در تحقیق‌های گذشته، در این پژوهش به بررسی به کارگیری این روش در تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای شامل لایه‌ی پیزوالکتریک پرداخته شده و دقت آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۲- تعریف مسئله

شکل (۱) پنل استوانه‌ای مدوری را نشان می‌دهد. لایه‌های کامپوزیت روی هم قرار گرفته که از نوع لمینیت با چپش زاویه‌ای است. مختصات محلی از نوع استوانه‌ای با توجه به شکل سیستم بر روی آن قرار داده می‌شود، مبدأ مختصات در مرکز پنل استوانه‌ای و محور طولی  $z$  در راستای طولی پنل قرار دارد.



شکل (۱) ابعاد و مشخصات پنل استوانه‌ای کامپوزیت چندلایه.

$\Gamma$  مختصات شعاعی است که در راستای شعاع قرار گرفته و  $\theta$  جهت زاویه‌ای آن را مشخص می‌کند، مقدار  $\theta$  از ۰ تا  $360^\circ$  درجه می‌تواند تغییر یابد. در اینجا  $\psi$  قطاعی مشخص بوده که بیانگر زاویه کل سیستم استوانه‌ای در نظر گرفته شده است.  $\beta$  زاویه‌ی الیاف نسبت به محور  $\theta$  می‌باشد. پس در راستای الیاف در هر لایه و دو راستای باقیمانده در جهت

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\theta}{\psi} \\ R_1^{(k)} &= R - \frac{h}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} t^{(i)} \\ \zeta^k &= \frac{r - R_1^{(k)}}{t^{(k)}} \\ R - \frac{h}{2} &= R_i \end{aligned} \right. \quad (9)$$

همانگونه که قبلاً ذکر شد با فرض کرنش صفحه‌ای و با حذف پارامترهای  $D_\theta, D_z, \sigma_\theta, \sigma_z$  و جایگزینی پاسخ سری از معادله (۷) و (۸) داخل معادلات (۴) تا (۶) مجموعه معادلات از مرتبه سیزده به مرتبه‌ی هشت تقلیل می‌یابند و رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = A Q \quad (10)$$

که در اینجا:

$$Q = [v_n, w_n, u_n, \sigma_r, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \phi_n, D_r]^T \quad (11)$$

و

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & A_{15} & A_{16} & A_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{25} & A_{26} & A_{27} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & A_{38} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & A_{46} & 0 & A_{48} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & 0 & 0 & A_{58} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & 0 & A_{66} & 0 & A_{68} \\ A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 & 0 & A_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{85} & A_{86} & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \quad (12)$$

که مؤلفه‌های غیرصفر ماتریس A در پیوست آورده شده است. وجود لایه‌ی پیزوالکتریک باعث عدم تقارن در ماتریس A شده است. ماتریس A را بر حسب شعاع می‌توان مرتب نمود که معادله‌ی (۱۰) به شکل زیر در می‌آید.

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \left[ A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} \right] Q \quad (13)$$

#### ۴- شرایط مرزی

در ادامه‌ی بحث به شرایط مرزی پرداخته خواهد شد. پوسته چندلایه استوانه‌ای در کناره‌ها به تکیه‌گاه ساده مقید شده است، شرایط مرزی در کناره‌ها بصورت زیر قابل بیان است [۲۵]:

$$\xi = 0 : u = 0, \sigma_\theta = 0, \sigma_{\theta z} = 0, \phi = 0 \quad (14)$$

$$\xi = 1 : u = 0, \sigma_\theta = 0, \sigma_{\theta z} = 0, \phi = 0 \quad (15)$$

بسط معادلات (۴) و (۵) روابط الکتروالاستیسته را بدست می‌دهد. به دلیل ماهیت ارتعاشی سیستم پوسته چندلایه‌ای معادلات مستخرج از تئوری الاستیسته در این حالت نیز صادق بوده و مشتمل بر معادلات زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= \rho \ddot{u} \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} &= \rho \ddot{v} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= \rho \ddot{w} \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

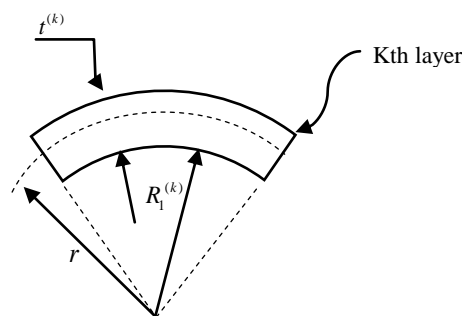
در مجموعه معادلات (۶) از نیروهای حجمی و منبع بارالکتریکی صرف‌نظر شده است. ارتعاشات ورق‌ها و پوسته‌ها در موده‌های ابتدایی ارتعاش، از قله‌های سینوسی و کسینوسی تشکیل شده که تقریب سری فوریه پاسخ دقیق و مناسبی را برای آن فراهم می‌کند. پاسخ سری فوریه معادلات (۴) تا (۶) بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(u, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{\theta z}, \phi, D_r) = \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{Re} \left[ (u, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{\theta z}, \phi, D_r)_n \right] e^{i\omega t} \sin(n\pi \xi) \quad (8)$$

$$(v, w, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, D_\theta, D_z) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Re} \left[ (v, w, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, D_\theta, D_z)_n \right] e^{i\omega t} \cos(n\pi \xi)$$

مشخصات ابعادی لایه‌ی  $k$  ام ساندویچ پنل در شکل (۲) نشان داده شده است. مختصات جانبی  $\xi$  و مختصات محلی در راستای ضخامت  $\zeta$  در این لایه، بصورت زیر تعریف می‌شود.



شکل (۲) مشخصات ابعادی لایه‌ی  $k$  ام.

در ادامه رابطه‌ی بازگشتی زیر نیز برای تعیین تابع پاسخ بدست می‌آید:

$$Z_{i+1} = [(A - (\lambda + 2i/s)I)Z_i + ((2A_0R_1 + A_1 - (2\lambda s + i - 1)I)Z_{i-1})/s^2 + ((tA_0 - \lambda I)Z_{i-2})/s^2]/(i+1) \quad (21)$$

از معادله‌ی (۱۹) با فرض  $Z_1 = 0$  بدست می‌آید:

$$AZ_0 = \lambda Z_0 \quad (22)$$

بنابراین نماد  $\lambda$  مقادیر ویژه و  $Z_0$  بردار ویژه جفت ماتریس  $A$  دارای هشت جفت دوتایی  $8 \times 8$  می‌باشند. در این حالت  $A$  دارای هشت جفت دوتایی ویژه  $(\lambda_j, Z_0^j)$  است،  $j = 1, \dots, 8$ . مجموعه هشت پاسخ به شکل رابطه‌ی (۱۸) با تابع نمائی  $e^{\lambda_j t}$  و ضرایب  $Z_i^j$  برای سری توانی و  $Z_0^j$  برای سری توانی  $Z_0^j$  بردار ویژه متعامد بوده و  $Z_1^j$  ضرایب دیگر سری‌ها با استفاده از رابطه‌ی (۲۱) برای  $\lambda = \lambda_j$  بدست می‌آید.

هریک از مقادیر ویژه ماتریس  $A$  حقیقی هستند یا بصورت مجموعه‌ای از جفت‌های مختلط درمی‌آیند. حل برای جفت مقادیر ویژه  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  با بردار ویژه  $Z_0^1$  بر طبق  $\lambda$  بر حسب ترم‌هایی از دو ثابت حقیقی  $C_1, C_2$  بصورت زیر بدست می‌آید:

$$Q(\zeta) = Y_1(\zeta)C_1 + Y_2(\zeta)C_2 \quad (23)$$

رابطه‌ی (۲۳) پاسخ عمومی برای متغیرهای وابسته  $Q$  است و همچنین توابع  $Y_1(\zeta), Y_2(\zeta)$  بر حسب توابعی مثلثاتی بصورت زیر هستند:

$$Y_1(\zeta) = e^{\alpha\zeta} \left[ \cos \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \text{Re}(Z_j^1) \zeta^i - \sin \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \text{Im}(Z_j^1) \zeta^i \right] \quad (24)$$

$$Y_2(\zeta) = e^{\alpha\zeta} \left[ \sin \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \text{Re}(Z_j^1) \zeta^i + \cos \beta\zeta \sum_{i=0}^{\infty} \text{Im}(Z_j^1) \zeta^i \right]$$

عبارت‌های  $\text{Im}, \text{Re}$  به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی توابع مختلط می‌باشند. شکل تابعی  $Y_j(\zeta)$  با استفاده از روابط (۲۴) بدست می‌آید. تنها چند جمله محدود از سری

در حالتی که پتانسیل الکتریکی  $\phi = \phi_i$  به کار رود، مشابه شرایط مدار الکتریکی مدار بسته است و اعمال چگالی بار الکتریکی  $D = D_i$  مشابه شرایط مدار الکتریکی باز است. شرایط پیوستگی در سطح مشترک لایه‌های همجوار بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\left[ u, v, w, \sigma_r, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}, \phi, D_r \Big|_{\zeta=1} \right]^k = \left[ u, v, w, \sigma_r, \sigma_{zr}, \sigma_{r\theta}, \phi, D_r \Big|_{\zeta=0} \right]^{k+1} \quad (16)$$

در ارتعاشات اجباری، تحریکی توسط لایه پیزوالکتریک با تشکیل پتانسیل الکتریکی ایجاد می‌گردد. در سطح مشترک لایه‌ی پیزوالکتریک با پنل‌هایی که در  $n_q$  امین سطح مشترک قرار دارد و برای  $k = 1, 2, \dots, L-1$  پارامتر  $D_r$  در روابط با پتانسیل  $La$  و  $k = n_q$  وارد می‌شود. برای چنین سطوحی شرایط پیوستگی با شرایط زیر جایگزین می‌گردد:

$$[\phi]_{\zeta=1}^{(n_q)} = \Phi_q(\xi, t); q = 1, \dots, L_a \quad (17)$$

### ۵- حل معادلات به کمک روش سری توانی

در ادامه پاسخ عمومی معادله‌ی (۱۳) با استفاده از روش سری با تابع توانی بدست می‌آید. تابع توانی در این سری وابسته به جهت مختصاتی بی‌بعد در راستای ضخامت است. در این حال  $0 \leq \zeta \leq 1$  است. پاسخ سری بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Q(\zeta) = e^{\lambda\zeta} \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \zeta^i \quad (18)$$

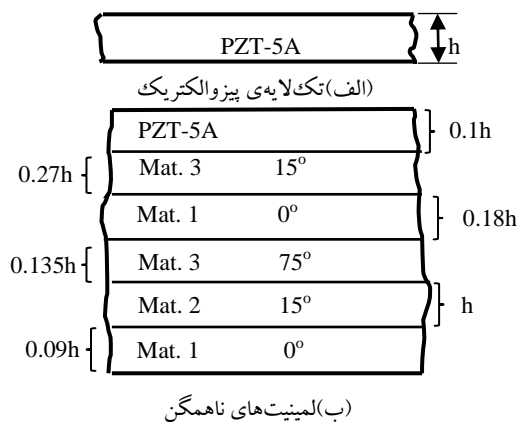
در اینجا ترم  $Z_i$  برای  $i \geq 0$  معتبر می‌باشد، علاوه بر مقادیر ویژه تابع حدس  $Z_i$  در ادامه بدست می‌آید. حال رابطه‌ی (۱۸) در معادله‌ی (۱۳) جایگزین شده و با فرض  $i = 0$  رابطه‌ای برای تعیین مقادیر ویژه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$s^2 Z_1 - s^2 (A - \lambda I) Z_0 = 0 \quad (19)$$

که در اینجا:

$$s = \frac{R_1}{t} \quad (20)$$

با یک لایه پیزوالکتریک روی سطح آن تحلیل می‌گردد. پوسته شامل ۵ لایه لمینای الیافی با تک لایه‌ی پیزوالکتریک است.



شکل (۶) نحوه‌ی چینش لایه‌های لمینیت استوانه‌ی.

در شکل (۶) در قسمت ب چگالی مواد اول، دوم، سوم و چهارم برابر ۱۵۷۸ کیلوگرم بر مترمکعب و در قسمت الف چگالی تک‌لایه پیزوالکتریک برابر ۷۶۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته می‌شود. قسمت (الف) شکل نشان‌دهنده‌ی تک لایه‌ی پیزوالکتریک و قسمت (ب) پل‌ها را نشان می‌دهد که خصوصیات متفاوتی از مواد را شامل شده و غیرهمگن است. نتایج در هر دو حالت برای هفت مود پایین لایه‌ها در مود فضایی  $n=1$  و تنها مود خمشی ۱ برای مود فضایی  $n=2$  در جدول (۲) آمده است و بانایج بدست آمده توسط چن و لی [۳] مقایسه گردیده است. محاسبات جدول (۱) بر اساس فرکانس بی‌بعد شده صورت گرفته است. فرکانس طبیعی بصورت زیر بی‌بعد گشته است:

$$\bar{\omega} = \omega_n R S_1 (\rho_0 / Y_0)^{1/2} \quad (27)$$

نتایج در جدول (۱) برای مقادیر  $S = 4, 20$  و در جدول (۲) برای  $S = 5, 10, 20$  پوسته فاقد لایه‌ی پیزوالکتریک و به همراه آن بدست آمده است. با توجه به نتایجی که در جدول ذکر شده است دقت مناسبی در مقایسه نتایج بدست آمده است. شکل مودها از این قرار است که مود اول یک مود خمشی است، مودهای دوم و سوم مودهای کششی هستند. مودهای چهارم و پنجم، مودهای برشی بین سطوح

توانی نامحدود تعیین می‌شوند و همچنین از ترم‌های بسیار کوچک صرف‌نظر می‌گردد. برای  $k$  امین لایه، مقدار  $Q_k^-$  برابر مقدار  $Q$  در سطح بالایی لایه  $1 = \zeta$ ، می‌تواند به مقدار  $Q_{k-1}^+$  برابر مقدار  $Q$  در سطح پایینی لایه  $0 = \zeta$  بصورت زیر تبدیل شود.

$$Q(0) = Y(0)C \Rightarrow C = [Y(0)]^{-1} Q(0)$$

$$Q(1) = Y(1)C = Y(1)[Y(0)]^{-1} Q(0) \Rightarrow$$

$$Q_k^- = T_k Q_{k-1}^+ : \text{that} : T_k = Y(1)[Y(0)]^{-1} \quad (25)$$

در اینجا  $T_k$  ماتریس انتقال  $k$  امین لایه می‌باشد [۲۶]. در حقیقت سطح مشترک بین دو لایه معادله‌ای را بدست می‌دهد که شرط پیوستگی را برآورده می‌کند.

### ۶- نتایج عددی

در این بخش نتایج بصورت عددی با استفاده از روابط حاضر بدست می‌آیند. پل استوانه‌ای بصورت لایه‌هایی با چینش زاویه‌ای بوده که قرارگیری لایه‌ها در آن بصورت زیر است و از پایین به بالا می‌باشد.

$$[-15^\circ / 60^\circ / 90^\circ / 75^\circ / -45^\circ] \quad (26)$$

برای تمامی لایه‌ها ضخامت و چگالی یکسانی در نظر گرفته شده است. همچنین ویژگی‌های لایه‌ها بصورت زیر می‌باشد [۳].

$$Y_L / Y_T = 25$$

$$G_{LT} / Y_T = 0.5$$

$$G_{TT} / Y_T = 0.2$$

$$\mu_{LT} / \mu_{TT} = 0.25$$

در اینجا  $Y$  تنش تسلیم و  $G$  مدول برشی و  $\mu$  نسبت پواسون است. زیر نویس  $T, L$  بیانگر کشش و فشار می‌باشد. زاویه‌ی قطاع استوانه برابر  $\nu = \pi/3$  می‌باشد. نتایج با کار انجام شده توسط چن و لی [۳] که توسط روش لایروایز صورت گرفته مقایسه شده‌اند. سپس نتایج عددی برای پل‌های استوانه‌ای با لایه‌ی پیزوالکتریک با پیکربندی مطابق شکل (۳) در جدول (۲) آمده است. دو حالت برای پل‌ها در نظر گرفته شده است. در حالت الف تک‌لایه پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته و در حالت ب پوسته



در موده‌های پایین خطایی بین دو روش لایروایز و سری توانی مشاهده نمی‌شود اما در مود پنجم به بعد مقداری بسیار جزئی خطا وجود دارد. روش سری توانی پاسخ‌ها را با سرعت بالایی همگرا می‌کند و عامل آن تابع نمایی<sup>۱</sup> است. سپس در ادامه فرکانس‌های طبیعی لمینیت به همراه لایه‌ی پیزوالکتریک مطابق شکل (۶) در جدول (۲) آمده است. مشخصات و ثوابت مادی لایه‌ها به همراه ثوابت لایه‌ی پیزوالکتریک بصورت زیر می‌باشد (جنس لایه‌ها در هر دو حالت یکسان است). [۲۷].

$$[(Y_1, Y_2, Y_3, G_{12}, G_{23}, G_{31})GPa, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}]$$

$$Mat.1: [(6.9, 6.9, 6.9, 2.76, 2.76, 2.76), 0.25, 0.25, 0.25]$$

$$Mat.2: [(224.25, 6.9, 6.9, 56.58, 1.38, 56.58), 0.25, 0.25, 0.25]$$

$$Mat.3: [(172.5, 6.9, 6.9, 3.45, 1.38, 3.45), 0.25, 0.25, 0.25]$$

$$Mat.4: [(181, 10.3, 10.3, 7.17, 2.87, 7.17), 0.28, 0.28, 0.33]$$

$$PZT - 5A: [(61, 61, 53.2, 22.6, 21.1, 21.1), 0.35, 0.38, 0.38] \text{ and } [(d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{15}, d_{24}), (\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33})] \rightarrow$$

$$\left[ \begin{matrix} (-171, -171, 374, 584, 584) \times 10^{-12} mV^{-1}, \\ (1.53, 1.53, 1.5) \times 10^{-8} Fm^{-1} \end{matrix} \right]$$

جدول (۲) فرکانس طبیعی  $\omega_n$  پوسته چندلایه استوانه‌ای با لایه‌ی پیزوالکتریک و تک لایه‌ی پیزوالکتریک تحت شرایط مدارباز (OC)

n	Mode	S	Panel (a)		Panel (b)	
۱		۵	۲/۴۳۱۳۱	۴/۶۴۷۲۲		
	۱	۱۰	۲/۵۲۰۹۱	۶/۳۰۷۵۱		
		۲۰	۲/۵۴۵۵۵	۷/۱۴۷۰۴		
		۵	۳/۶۲۱۹۸	۳/۵۱۶۳۸		
	۲	۱۰	۳/۶۷۰۹۰	۳/۹۳۷۲۰		
		۲۰	۳/۶۸۲۶۰	۴/۰۶۰۷۹		

بوده که در اثر صفر بودن جابجایی عرضی ایجاد شده‌اند. موده‌های ششم و هفتم موده‌های برشی مرتبه بالاتر در میان جهت محیطی می‌باشد.

جدول (۱) فرکانس طبیعی  $\omega_n$  ساندویچ پل استوانه‌ای تحت شرایط مدارباز (OC)

n	Order	S=۴		S=۲۰	
		Chen & Lee	Present	Chen & Lee	Present
۱	۱	۰/۸۰۰۹۱۳	۰/۸۰۰۹۱۳	۰/۲۹۷۲۸۹	۰/۲۹۷۲۸۹
	۲	۳/۶۸۵۳۸	۳/۶۸۵۳۸	۴/۵۷۷۱۷	۴/۵۷۷۱۷
۳	۳	۵/۴۵۶۸۷	۵/۴۵۶۸۷	۸/۱۴۴۶۶	۸/۱۴۴۶۶
	۴	۷/۹۳۷۲۷	۷/۹۳۷۲۷	۳۰/۱۳۷۵	۳۰/۱۳۷۵
۵	۵	۹/۷۳۲۵۴	۹/۷۳۲۵۵	۳۹/۶۷۳۲	۳۹/۶۷۳۲
	۶	۱۱/۲۹۶۴	۱۱/۲۹۶۶	۶۰/۵۶۷۱	۶۰/۵۶۷۲
۷	۷	۱۳/۱۳۸۳	۱۳/۱۳۸۵	۶۳/۶۸۷۷	۶۳/۶۸۷۸
	۱	۲/۱۷۱۶۶	۲/۱۷۱۶۶	۱/۲۰۷۶۵	۱/۲۰۷۶۵
۲	۲	۶/۴۶۸۳۷	۶/۴۶۸۳۷	۸/۹۲۶۴۱	۸/۹۲۶۴۱
	۳	۷/۸۹۴۹۹	۷/۸۹۴۹۹	۱۵/۰۶۶۸	۱۵/۰۶۶۸
۴	۴	۹/۷۵۴۹۳	۹/۷۵۴۹۳	۳۴/۵۶۶۰	۳۴/۵۶۶۰
	۵	۱۱/۷۳۵۳	۱۱/۷۳۵۴	۴۰/۶۱۵۲	۴۰/۶۱۵۳
۶	۶	۱۳/۴۷۹۱	۱۳/۴۷۹۴	۶۱/۳۷۴۲	۶۱/۳۷۴۴
	۷	۱۴/۶۴۳۵	۱۴/۶۴۳۸	۶۴/۵۶۹۷	۶۴/۵۶۹۹

1- Exponential function

شعاع محدودیت اساسی وجود دارد. وجود چنین تغییری را می‌توان ناشی از مود خمشی در راستای ضخامت دانست. تعداد پنج جمله اول سری تقریب مناسبی برای تعیین فرکانس‌ها ایجاد کرده است تحقیقات انجام شده در همین پژوهش حاکی از آن است که اختلاف بسیار اندکی در مودهای بالاتر بدست می‌آید.

**۷- نتیجه گیری**

در مطالعه‌ی حاضر مسئله‌ی پیزوالاستیسیته دوبعدی برای ارتعاشات آزاد مستهلک نشده برای پوسته استوانه‌ای با چینش زاویه‌ای لایه‌های مقید به تکیه‌گاه‌های ساده بررسی شد. روش تحلیلی بر پایه‌ی سری‌های فوریه در نظر گرفته شد و بر مبنای روش سری توانی اصلاح شده برای مودهای خمشی در راستای ضخامت ورق استوانه‌ای، مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفت. این روش همگرایی سریعتر و بهتری را نسبت به روش مشابه معمولی ارائه می‌دهد. نادیده گرفتن اثر نیروی برشی اختلاف بسیار ناچیزی را مخصوصاً در مودهای پایینی سبب می‌گردد. اختلاف بسیار جزئی پدید آمده در نتایج نشان‌دهنده دقت بالای روش مذکور است. همچنین این روش، سرعت بالاتری نسبت به روش‌های دیگر در همگرا شدن پاسخ از خود نشان داد که علت آن، تغییرات نمایی در روش سری توانی اصلاح شده است.

**۸- فهرست علائم**

$\omega$	فرکانس طبیعی بی‌بعد
$\omega_n$	فرکانس طبیعی (Cycle/time)
$\rho$	چگالی ( $\text{Kg/m}^3$ )
$R$	شعاع (m)
$h$	ضخامت لمینا (m)
$Y$	مدول الاستیسیته (Pa)
$\sigma$	تنش (Pa)
$\varepsilon$	کرنش اصلی
$\gamma$	کرنش برشی
$\varepsilon_{ij}$	ماتریس ضرایب کرنش پیزوالکتریک
$\bar{S}_{ij}$	ماتریس ضرایب الاستیک (Pa)

	۵	۱۱/۳۵۳۳	۸/۳۵۸۲۵
۳	۱۰	۲۱/۶۴۹۸	۹/۷۰۶۳۱
	۲۰	۴۲/۵۴۵	۱۰/۱۵۲۷
	۵	۳/۵۶۲۲۱	۱/۷۲۶۳۰
۴	۱۰	۳/۶۲۲۰۱	۱/۳۸۳۲۵
	۲۰	۳/۶۵۶۵۱	۱/۲۹۹۱۹
	۵	۴/۲۲۶۶۹	۲/۵۴۹۰۱
	۱۰	۴/۰۹۲۶۱	۱/۹۹۹۰۰
	۲۰	۴/۰۵۰۲۲	۱/۷۳۶۲۳
	۵	۵/۶۳۱۷۸	۲/۸۱۷۸۸
۶	۱۰	۵/۶۲۰۱۱	۲/۶۵۵۶۶
	۲۰	۵/۶۱۷۲۸	۲/۶۴۴۱۱
	۵	۸/۱۰۰۲۲	۲/۰۱۶۷۲
	۱۰	۸/۰۷۷۱۱	۲/۷۲۸۶۰
	۲۰	۸/۰۷۱۱۶	۲/۶۹۳۶۸
	۵	۹/۶۶۱۲۲	۱۳/۳۵۱۵
۲	۱	۱۰/۹۹۰۵	۲۱/۲۷۱۹
	۲۰	۱۱/۴۴۹۰	۲۸/۷۸۰۳

وجود اغتشاش در داده‌های بدست آمده (وجود تغییر ناگهانی در مقادیر) نشان از عدم همگرایی صحیح در برخی فرکانس‌ها بوده که خوشبختانه چنین اغتشاشی در نتایج ملاحظه نگردیده است که شیب ملایمی در تغییر مقادیر فرکانس‌ها اتفاق افتاده است. در مود سوم با افزایش شعاع، افزایش قابل توجهی در مقادیر فرکانس طبیعی رخ داده است که بیان‌کننده این مطلب است که در مورد افزایش

$$A_{74} = (\bar{d}'_{31}P_{14} + \bar{d}'_{32}P_{24} + \bar{d}'_{36}P_{64} + \bar{d}'_{33}),$$

$$A_{78} = (\bar{d}'_{31}P_{18} + \bar{d}'_{32}P_{28} + \bar{d}'_{36}P_{68} - 1/\bar{\epsilon}_{33}),$$

$$A_{85} = (\bar{n}/r)\bar{d}_{14}, A_{86} = (\bar{n}/r)\bar{d}_{15},$$

$$A_{87} = -(\bar{n}/r)^2 \bar{\epsilon}_{11}, A_{88} = (-1/r)$$

در اینجا از تبدیلات زیر استفاده شده است:

$$\bar{S}'_{ij} = \bar{S}_{ij} - \bar{d}_{ij}\bar{d}'_{j3}$$

$$\bar{d}'_{ij} = \bar{d}_{ij}/\bar{\epsilon}_{33}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}'_{11} & \bar{S}'_{12} & \bar{S}'_{16} \\ \bar{S}'_{12} & \bar{S}'_{22} & \bar{S}'_{26} \\ \bar{S}'_{16} & \bar{S}'_{26} & \bar{S}'_{66} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix}$$

$$P_{i1} = -S_{i2}, P_{i2} = -S_{i6},$$

$$P_{i4} = -(S_{i1}\bar{S}'_{13} + S_{i2}\bar{S}'_{23} + S_{i6}\bar{S}'_{36})$$

$$P_{i8} = -(S_{i1}\bar{d}'_{13} + S_{i2}\bar{d}'_{23} + S_{i6}\bar{d}'_{36})$$

### مراجع

- [1] Qing-Hua, Q., *Advanced Mechanics of Piezoelectricity*, Springer Verlag, 2013, pp.1-4.
- [2] Fernandes A., Pouget J., Two-dimensional modelling of laminated piezoelectric composites: analysis and numerical results, *Journal of Thin Walled Structures*, 39, 2000, pp.3-22.
- [3] Chen W.Q., Lee K.Y., State-space approach for statics and dynamics of angle-ply laminated cylindrical panels in cylindrical bending, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, 2005, pp.374-387.
- [4] Srinivas S., Rao A.K., Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates, *International Journal of Solids Structures*, 6, 1970, pp.1463-1481.
- [5] Adelman N.T., Stavsky Y., Radial vibrations of axially polarized piezoelectric ceramic cylinders, *Journal of Acoustical Society of America*, 57, 1975, pp.356-360.
- [6] Cho K.N., Bert C.W., Striz A.G., Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by high order individual-layer theory, *Journal of Sounds & Vibration*, 145(3), 1991, pp.429-442.

$D_i$	ماتریس جابجایی الکتریکی
$\lambda$	مقدار ویژه
$E$	میدان الکتریکی (N/C)
$\bar{d}_{ij}$	ماتریس ثوابت دی الکتریک
$G$	مدول برشی (Pa)
$\phi$	پتانسیل الکتریکی (V)
$\mu, \nu$	نسبت پواسون
$u, v, w$	جابجایی در جهات مختصاتی (m)

### ۹- پیوست

عناصر ماتریس در رابطه‌ی (۱۲) بصورت زیر است:

$$A_{11} = -\bar{n}/r, A_{13} = 1/r, A_{15} = \bar{S}_{45}, A_{16} = \bar{S}_{55}$$

$$A_{17} = -(\bar{n}/r)\bar{d}_{15}, A_{25} = \bar{S}_{44}, A_{26} = \bar{S}_{45}$$

$$A_{27} = -(\bar{n}/r)\bar{d}_{14},$$

$$A_{31} = (\bar{n}/r)(\bar{S}'_{13}P_{11} + \bar{S}'_{36}P_{61} + \bar{S}'_{23}P_{21}),$$

$$A_{32} = (\bar{n}/r)(\bar{S}'_{13}P_{12} + \bar{S}'_{23}P_{22} + \bar{S}'_{36}P_{62}),$$

$$A_{33} = -(1/r)(\bar{S}'_{13}P_{11} + \bar{S}'_{23}P_{21} + \bar{S}'_{36}P_{61}),$$

$$A_{34} = (\bar{S}'_{13}P_{14} + \bar{S}'_{23}P_{24} + \bar{S}'_{36}P_{64} + \bar{S}'_{33}),$$

$$A_{38} = (\bar{S}'_{13}P_{18} + \bar{S}'_{23}P_{28} + \bar{S}'_{36}P_{68} + \bar{d}'_{33}),$$

$$A_{41} = \bar{n}P_{11}/r^2, A_{42} = \bar{n}P_{12}/r^2,$$

$$A_{43} = (-P_{11}/r^2) - \rho\omega^2, A_{44} = (P_{14}-1)/r$$

$$A_{46} = \bar{n}/r, A_{48} = P_{18}/r, A_{51} = -(\bar{n}/r)^2 P_{61},$$

$$A_{52} = -(\bar{n}/r)^2 P_{62} - \rho\omega^2, A_{53} = (\bar{n}/r^2) P_{61},$$

$$A_{54} = -(\bar{n}/r)P_{64}, A_{55} = -1/r,$$

$$A_{58} = -(\bar{n}/r)P_{68}, A_{61} = -(\bar{n}/r)^2 P_{11} - \rho\omega^2,$$

$$A_{62} = -(\bar{n}/r)^2 P_{12}, A_{63} = (\bar{n}/r^2) P_{11},$$

$$A_{64} = -(\bar{n}/r)P_{14}, A_{66} = -2/r,$$

$$A_{68} = -(\bar{n}/r)P_{18},$$

$$A_{71} = (\bar{n}/r)(\bar{d}'_{13}P_{11} + \bar{d}'_{32}P_{21} + \bar{d}'_{36}P_{61}),$$

$$A_{72} = (\bar{n}/r)(\bar{d}'_{31}P_{12} + \bar{d}'_{32}P_{22} + \bar{d}'_{36}P_{62}),$$

$$A_{73} = (-1/r)(\bar{d}'_{31}P_{11} + \bar{d}'_{32}P_{21} + \bar{d}'_{36}P_{61}),$$

- Journal of Sound & Vibration*, 296, 2006, pp.979-999.
- [17] Pandit M. K., Haldar S., Mukhopadhyay M., Free vibration analysis of laminated composite rectangular plate using finite element method, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26 (1), 2007, pp.69-80.
- [18] Civalek O., Free vibration analysis of symmetrically laminated composite plates with first-order shear deformation theory (FSDT) by discrete singular convolution method, *Journal of Finite Elements in Analysis and Design*, 12-13, 2008, 44, pp.725-731.
- [19] Brethee K. F., Free vibration analysis of a symmetric and anti-symmetric laminated composite plate with a cutout at the center, *Al-Qadisiya Journal for Engineering Sciences*, 42, 2009, 13, pp.43-56.
- [20] Ngo-Cong D., Mai-Duy N., Karunasena W., Tran-Cong T., Free vibration analysis of laminated composite plates based on FSDT using one-dimensional IRBFN method, *Journal of Computers and Structures*, 89 (1-2), 2011, pp.1-13.
- [21] Messina A., Influence of the edge-boundary conditions on three-dimensional free vibrations of isotropic and cross-ply multilayered rectangular plates, *Journal of Composite Structures*, 93(8), 2011, pp.2135-2151.
- [22] Xiang S., Bi Z.Y., Jiang S.X., Jin Y.X., Yang M.S., Thin plate spline radial basis function for the free vibration analysis of laminated composite shells. *Journal of Composite Structures*, 93(2), 2011, pp.611-615.
- [23] Boscolo M., Banerjee J.R., Layer-wise dynamic stiffness solution for free vibration analysis of laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration*, 333 (1), 2014, 200-227.
- [24] Sadd Martin H., *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, Burlington, USA, Elsevier Inc., 2015, pp.61-63.
- [25] Qing-Hua Q., *Advanced Mechanics of Piezoelectricity*, Springer-Verlag, 2013, pp.4-25.
- [26] Kapuria S., Achary G.G.S., Exact 3D piezoelectricity solution of hybrid cross-ply plates with damping under harmonic electromechanical
- [7] Chen C.Q., Shen Y.P., Piezothermoelasticity analysis for circular cylindrical shell under the state of axisymmetric deformation, *International Journal of Engineering Science*, 34, 1996, pp.1585-1600.
- [8] Chen C.Q., Shen Y.P., Three-dimensional analysis for free vibration of finite-length orthotropic piezoelectric circular cylindrical shells, *Transactions of the ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 120, 1998, pp.194-198.
- [9] Batra R.C., Aimmanee S., Missing frequencies in previous exact solutions of free vibrations of simply supported rectangular plates, *Journal of Vibration Control*, 265, 2003, pp.887-896.
- [10] Aydogdu M., Timarchi T., Vibration analysis of cross-ply laminated square plates with general boundary conditions, *Composite Science and Technology*, 63 (7), 2003, pp.1061-1070.
- [11] Liew K. M., Huang Y. Q., Reddy J. N., Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (19), 2003, pp.2203-2222.
- [12] Kang JH., and Shim HJ., Exact solutions for the free vibrations of rectangular plates having inplane moments acting on two opposite simply supported edges, *Journal of Sounds & Vibration*, 273, 2004, pp.933-948.
- [13] Chen W.Q., Lee K.Y., Static and dynamic behaviour of simply-supported cross-ply laminated piezoelectric cylindrical panels with imperfect bonding, *Journal of Composite Structures*, 74, 2006, pp.265-276.
- [14] Chen W.Q., Lee K.Y., Benchmark solution of angle-ply piezoelectric-laminated cylindrical panels in cylindrical bending with weak interfaces, *Archive of Applied Mechanics*, 74, 2005, pp.466-476.
- [15] Karami G., Malekzadeh P., Mohebpour S. R., DQM free vibration analysis of moderately thick symmetric laminated plates with elastically restrained edges, *Journal of Composite Structures*, 74 (1), 2006, pp.115-125.
- [16] Shimpi R.P., Patel H.G., Free vibrations of plate using two variable refined plate theory,

loads, *Journal of Sound and Vibration*, 282, 2005, pp.617–634.

[27] Kumari P., Nath J.K., Dumir P.C., Kapuria S., 2D exact solutions for flat hybrid piezoelectric and magnetoelastic angle-ply panels under harmonic load, *Journal of Smart Materials and Structures*, 16, 2007, pp.1651–1661.

