



ارزیابی روش های بدون المان و حل تحلیلی برای بررسی ترک دو بعدی در حالت الاستیک

میثم نسیم زاده^۱، شهرام شهروئی^{۲*}

* نویسنده مسئول: shahramshahrooi@iauhvaz.ac.ir

واژه‌های کلیدی

روش بدون المان، EFG، RPIM،
کوپلینگ با المان محدود

چکیده

در این مقاله، دو روش بدون المان گالرکین (EFG) و درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی (RPIM) به منظور محاسبه میدان تنش و جابجایی ناشی از یک ترک عرضی در یک ورق مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به این منظور فرآیندی برای اتصال دو ناحیه بدون المان و ناحیه المان محدود با در نظر گرفتن یک ناحیه فصل مشترک پیشنهاد شده است. راهکار پیشنهادی در این تحقیق، استفاده از یکی از روش‌های بدون المان EFG یا RPIM به همراه غنی‌سازی و اعمال آن تنها در نواحی خاصی است که روش بدون المان دارای مزیت می‌باشد. بر این اساس، راهکار پیشنهاد شده برای اتصال روش‌های المان محدود و بدون المان، از نظر دقت و سرعت باعث بهبود پاسخ می‌شود. انطباق خیلی خوب پاسخ حاصل از روش بدون المان RPIM با پاسخ تحلیلی به دلیل استفاده از طبیعت میدان حل در معادلات روش با استفاده از غنی‌سازی است.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اهواز، اهواز، ایران.

۲- استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اهواز، اهواز، ایران.

۱- مقدمه

درک مکانیزم تغییر شکل و میدان تنش اطراف ترک به منظور ارزیابی ایمنی و پیش‌بینی عمر سازه‌های مکانیکی از اهمیت بسزایی برخوردار است. به دلیل ناپیوستگی تنش و خصوصیات غیر خطی میدان‌های تنش و کرنش اطراف ترک، بدست آوردن پاسخ تحلیلی برای آنها بسیار مشکل است. از این رو در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های عددی و تقریبی مانند المان محدود برای تحلیل مسائل مکانیک شکست، خصوصاً در مورد ترک‌های ساکن (غیر دینامیک) مورد استقبال قرار گرفته است. با این حال، روش المان محدود مشکلاتی خاص خود دارد که از آن جمله می‌توان به مشکلات ایجاد المان برای محیط ترک دار و نیاز به المان بندی مجدد برای تحلیل ترک‌های دینامیکی اشاره کرد. برای غلبه بر مشکلات فوق روش بدون المان^۱ ابداع شده و در زمینه‌های مختلف با موفقیت به کار رفته است. در این روش با حذف المان‌ها، نیاز به المان بندی نیز از بین می‌رود و مشکلات ناشی از آن مرتفع می‌گردد.

آقای دوفلوت و هانک [۱] مسأله رشد ترک خستگی را تحت بارگذاری متناوب با استفاده از روش EFG^۲ غنی سازی شده بررسی کردند. آنها رشد ترک را به صورت گسترش‌های خطی پی در پی مدل کردند که از روی ضرایب تمرکز تنش حاصل از یک تحلیل الاستیک خطی بدست می‌آمد. در این تحقیق با توجه به تکین بودن تنش در نوک ترک، به منظور افزایش دقت پاسخ، سه گره با وزن‌های مخصوص در محل نوک ترک اضافه شده است. بررسی دقت روش غنی شده‌ی پیشنهادی روی چند مسأله‌ی ساده‌ی نمونه انجام شده و در نهایت مسأله رشد ترک مورد توجه قرار گرفته است.

رائو و رحمان [۲] راهکاری برای متصل کردن روش بدون المان EFG و روش المان محدود به منظور تحلیل سازه‌های

ترک‌دار تحت بارگذاری‌های مود I و مود مختلط ارائه کرده‌اند. در روش پیشنهاد شده، از EFG برای مدل‌سازی رفتار ماده در نزدیکی ترک و از المان محدود برای نواحی دور از ترک استفاده شده است. در این مرجع، از راهکار پیشنهادی برای محاسبه ضرایب تمرکز تنش مود I و II برای چند مسأله دو بعدی استفاده شده و نشان داده شده است که مقادیر پیش‌بینی شده در تطابق کامل با پاسخ‌های موجود تماماً المان محدود و یا تماماً بدون المان قرار دارند. در عین حال، این روش، مزیت عدم نیاز به المان بندی در اطراف ترک و سرعت بالای روش المان محدود را دارا می‌باشد. به منظور مقایسه با روش‌های عددی موجود و نتایج آزمایشگاهی، تعدادی مسأله رشد ترک در وضعیت مود مختلط حل شده و تطابق نتایج بررسی شده است.

گو و ژانگ [۳] روشی برای اتصال نواحی بدون المان و المان محدود با در نظر گرفتن پیوستگی جابجایی تا هر مرتبه دلخواه ارائه کرده‌اند. آنها به این منظور یک ناحیه گذار بین دو بخش المان محدود و بدون المان تعریف کرده‌اند که در آن با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، پیوستگی مورد نیاز به صورت معادلات قیدی اعمال می‌شود. در این مرجع ذکر شده که روش‌های اتصال میدان‌های پیشنهاد شده در گذشته از یک مرز جدا کننده دو میدان برای اعمال شرط پیوستگی پاسخ استفاده می‌کنند. مشکلی که در این روش‌ها وجود دارد این است که در روی مرز باید گره‌های روش بدون المان با گره‌های المان محدود منطبق باشند. بعلاوه اعمال شرط پیوستگی مراتب بالا روی این مرز مشکل است.

۲- روش بدون المان گالرکین

توضیح مختصر درباره روش بدون المان گالرکین برای یک مسئله الاستیسیته دو بعدی در این بخش می‌آید.

در روش EFG از درونیایی MLS برای تغیر متغیرهای میدان استفاده می‌شود. جابجایی در جهت X به صورت زیر فرض می‌شود:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j = p^T(x) a \quad (1)$$

1-Meshless Method

2-Element-Free Galerkin (EFG) Method

$$= \Phi^T(x)U_s$$

بردار $\Phi^T(x)$ بردار توابع شکل است:

$$\Phi^T(x) = \{\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \dots \ \phi_n(x)\} \quad (7)$$

$$= p^T(x)A^{-1}(x)B(x)$$

برای آنکه ماتریس A معکوس پذیر باشد باید تعداد گره های موجود در دامنه ی اثر هر نقطه ی مورد علاقه از تعداد توابع پایه بیشتر باشد ($n > m$).

با به دست آوردن تقریب جابجایی در جهت x و به طور مشابه در جهت y می توان مشابه روش المان محدود با استفاده از روش گلرکین، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی الاستیسیته را به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل کرد. این معادلات به طور خلاصه در ادامه می آید.

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (8)$$

که در آن ϵ بردار کرنش، σ بردار تنش، u بردار جابجایی، b بردار نیروی حجمی، \bar{t} بردار نیروی کشش سطح و Γ_t قسمتی از مرز میدان است که شرط مرزی کشش سطحی روی آن اعمال شده است.

به جای بردار جابجایی، از تقریب MLS آن استفاده می کنیم:

$$u^h(x) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$= \Phi U$$

که در آن N تعداد کل گره ها، ϕ_j تابع شکل MLS برای گره j -ام و در نهایت، u_j و v_j به ترتیب پارامترهای جابجایی در جهات x و y برای گره j -ام است.

با استفاده از این جابجایی می توان بردارهای کرنش و تنش تقریب زده شده را محاسبه کرد:

که در آن $p(x)$ بردار توابع پایه، m تعداد آنها و a بردار ضرایب مجهول است. یک انتخاب برای توابع پایه، توابع چند جمله ای تا درجه خاص است.

برای محاسبه a معیار خطای زیر را براساس n گره موجود در دامنه اثر هر نقطه مورد علاقه (x) به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$J = \sum_{i=1}^n \bar{W}(x - x_i) [p^T(x_i)a - u_i]^2 \quad (2)$$

که در آن $\bar{W}(x)$ یک تابع دلخواه است که به گونه ای انتخاب می شود که به گره های نزدیک نقطه مورد علاقه وزن بیشتری بدهد. همچنین باید مقدار تابع وزن در دامنه اثر نقطه مورد علاقه بیشتر از صفر و خارج از آن صفر باشد. با حداقل کردن معیار خطای J ضرایب مجهول محاسبه می شوند:

$$\partial J / \partial a = 0 \rightarrow A(x) = B(x)U_s \quad (3)$$

$$\rightarrow a = A(x)^{-1}B(x)U_s$$

که در آن U_s بردار پارامترهای گره ای:

$$U_s = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}^T \quad (4)$$

و ماتریس های A و B به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \bar{W}(x - x_i) p(x_i) p^T(x_i) \quad (5)$$

$$B(x) = [\bar{W}(x - x_1) p(x_1) \ \dots \ \bar{W}(x - x_n) p(x_n)]$$

با قرار دادن مقدار بدست آمده برای a از معادله (۳) در معادله (۱) تقریب MLS جابجایی در جهت x به صورت زیر بر حسب پارامترهای گره ای حاصل می شود:

$$u^h(x) = p^T(x)A(x)^{-1}B(x)U_s \quad (6)$$

در جمله (۱۵) جمله مربوط به چند جمله ای ها مانند معادله (۱) است. تابعی شعاعی است که روی نقطه مورد علاقه و محوریت گره i -ام محاسبه شده است، فاصله نقطه مورد علاقه از گره i -ام است.

توابع شعاعی زیادی برای کاربرد های مختلف تعریف شده است. برای مثال تابع MQ^۳ که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(r) = [r^2 + (\alpha d_c)^2]^q \quad (16)$$

که در آن α و q پارامتر های کنترلی هستند و d_c فاصله متوسط گره ها از هم است. برای مسائل الاستیسیته برای α و q به ترتیب مقادیر $1/0.3$ و $1/0$ مناسب است.

برای تعیین ضرایب مجهول a_i و b_j ، مقدار جابجایی تقریبی را برابر جابجایی گره ای قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{i=1}^n R_i(r_i(x_1))a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x_1)b_j \\ u_2 &= \sum_{i=1}^n R_i(r_i(x_2))a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x_2)b_j \\ &\vdots \\ u_n &= \sum_{i=1}^n R_i(r_i(x_n))a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x_n)b_j \end{aligned} \quad (17)$$

معادلات (۱۷) را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$U_s = R_n a + P_m b \quad (18)$$

که در آن:

$$U_s = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}^T$$

$$R_n = \begin{bmatrix} R(r_1(x_1)) & \dots & R(r_n(x_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(r_1(x_n)) & \dots & R(r_n(x_n)) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (19)$$

$$\epsilon^h = Lu^h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \Phi U = BU \quad (10)$$

$$\sigma = D\epsilon = DBU$$

به این ترتیب می توان جملات معادله (۸) را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega &= \int_{\Omega} (B\delta U)^T (DBU) d\Omega \quad (11) \\ &= \delta U^T \left[\int_{\Omega} B^T DB d\Omega \right] U \\ &= \delta U^T KU \end{aligned}$$

با انجام عملیات مشابه در مورد جملات دوم و سوم معادله (۸) داریم:

$$\int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma = \delta U^T F \quad (12)$$

که در آن:

$$F = \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t} d\Gamma \quad (13)$$

بنابراین معادله (۸) به صورت زیر در می آید:

$$\delta U^T KU + \delta U^T F = 0 \rightarrow KU + F = 0 \quad (14)$$

معادله (۱۴) شکل نهایی دستگاه معادلات خطی حاصل از روش EFG است.

۳- روش درونبایی نقطه ای شعاعی

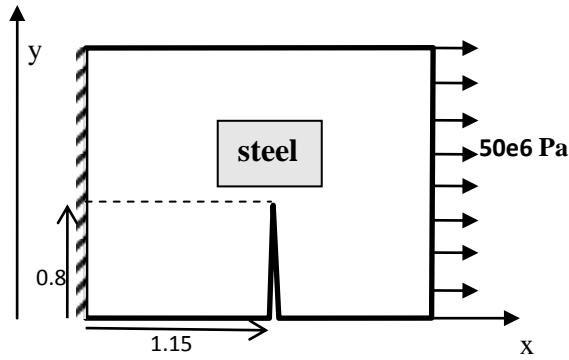
در روش بدون المان درونبایی نقطه ای شعاعی (RPIM)^۱ میدان های جابجایی با استفاده از توابع پایه شعاعی (RBF)^۲ تقریب زده می شوند:

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{i=1}^n R(r_i(x))a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x)b_j \\ &= \{R^T(x) \ p^T(x)\} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

^۱Radial Point Interpolation Method

^۲Radial Basis Function

^۳Multi-quadratic



شکل (۱) مسئله ورق ترک دار

برای ایجاد امکان اعمال مدل رله به روش EFG باید از یک تابع وزن شعاعی در فرمولبندی آن استفاده کرد. تابع وزن مورد استفاده برای روش EFG به صورت زیر است:

$$W(\bar{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}^2 + 4\bar{r}^3 & \bar{r} < 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r} + 4\bar{r}^2 - \frac{4}{3}\bar{r}^3 & 0.5 < \bar{r} < 1 \\ 0 & \bar{r} > 1 \end{cases} \quad (24)$$

که در آن $\bar{r} = \frac{r}{d_s}$ است که r فاصله نقطه مورد علاقه از گره و d_s اندازه (شعاع) دامنه ی اثر نقطه مورد علاقه است. برای استفاده از روش EFG نیاز به استفاده از مدل رله برای اعمال ترک می باشد [۴]. در مدل رله فاصله موثر نقطه ی مورد علاقه از یک گره با توجه به موقعیت این دو نقطه نسبت به اضلاع ترک محاسبه می شود. به این ترتیب که در صورت عدم وجود ترک در خط واصل دو نقطه، فاصله موثر برابر فاصله ی فیزیکی و در صورت وجود آن، با انجام یک سری محاسبات، فاصله ای بزرگتر از فاصله ی فیزیکی بعنوان فاصله ی موثر در نظر گرفته می شود. با اعمال این فاصله ی موثر به تابع وزن مورد استفاده، اثر گره روی نقاط پشت ترک به صورت پیوسته ای به صفر میل می کند.

5- حل مسئله ی ورق ترک دار با روش کوپلینگ

هنگام محاسبه ی میدان های جابجایی و تنش در یک ورق دارای ترک، بهتر است روش بدون المان تنها به ناحیه ای محدود باشد که نوک ترک در آن واقع شده است. باقی نواحی ورق را می توان با استفاده از روش المان محدود مدل سازی کرد (شکل (۲)).

$$P_m = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{n \times m}$$

در معادله (۱۸) تعداد n مجهول a_i و m مجهول b_j وجود دارد، در حالی که فقط n معادله موجود است. m معادلات دیگر را می توان در قالب معادلات قیدی زیر اضافه کرد:

$$P_m^T a = 0 \quad (20)$$

به این ترتیب دستگاه معادلات $n+m$ معادله به صورت زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} R_n & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\rightarrow Ga_0 = \begin{Bmatrix} U_s \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با حل این معادلات و قرار دادن پاسخ آن در معادله (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} a_0 &= \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = G^{-1} \begin{Bmatrix} U_s \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \rightarrow u^h(x) &= \{R(x)^T \quad p(x)^T\} G^{-1} \begin{Bmatrix} U_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22) \\ &= \{\Phi^T(x) \quad \Psi^T\} \begin{Bmatrix} U_s \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \Phi^T(x) U_s \end{aligned}$$

با به دست آمدن توابع شکل، همانند روش EFG به دستگاه معادلات می رسیم.

۴- مسئله ترک دو بعدی برای صحت روش ها

ابتدا برای بررسی صحت پیاده سازی روش، مسئله مورد استفاده در این مقاله، بارگذاری مود I یک ترک در یک میدان دو بعدی الاستیک است را بررسی می کنیم شکل (۱). پاسخ تحلیلی برای جابجایی انتهایی این مسئله (البته با فرض بلند بودن ورق) به صورت زیر است:

$$\delta = \frac{\sigma L}{E} = \frac{50e^6 \times 2}{2.1e^{11}} = 4.76 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (23)$$

شکل گره x_j که در نقطه‌ی مورد علاقه‌ی x محاسبه شده است.

و در نهایت مشتق توابع شکل نیز به صورت زیر است:

$$A\gamma' = p' - \sum_j p(x_j)N_j'(x) - A'\gamma \quad (26)$$

$$\Phi'^T = \gamma'^T B + \gamma^T B'$$

که در آن، معادله‌ی اول یک دستگاه معادلات خطی برای γ' است. با محاسبه‌ی γ' می‌توان Φ' را محاسبه نمود.

۶- مقایسه با پاسخ تحلیلی

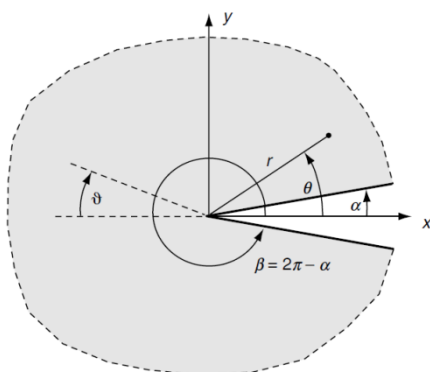
به منظور صحت سنجی روش پیشنهاد شده از توزیع تنش تحلیلی برای یک ترک در محیط دو بعدی استفاده شده است [۵]:

$$\alpha_x = -\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[A\left(\sin\frac{3}{2}\theta + 5\sin\frac{\theta}{2}\right) + B\left(\cos\frac{3}{2}\theta + \frac{5}{3}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\alpha_\theta = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[A\left(\sin\frac{3}{2}\theta - 3\sin\frac{\theta}{2}\right) + B\left(\cos\frac{3}{2}\theta - \cos\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (27)$$

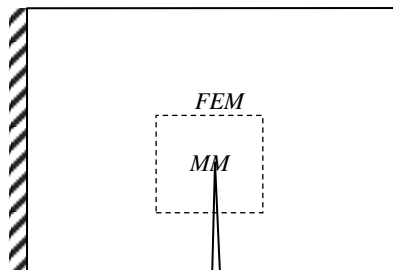
$$\tau_{r\theta} = -\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[A\left(\cos\frac{3}{2}\theta - \cos\frac{\theta}{2}\right) - B\left(\sin\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

در این معادلات، r عبارت است از فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از نوک ترک و θ موقعیت زاویه‌ای آن نسبت به خط ترک است شکل (۴).



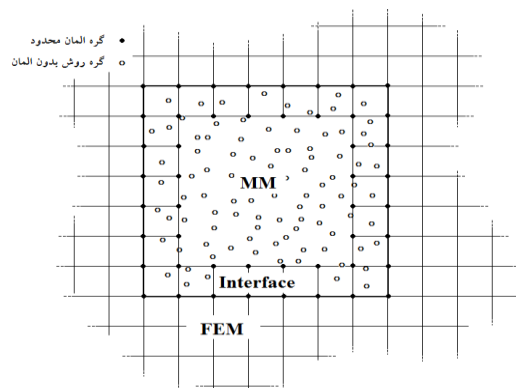
شکل (۴) هندسه‌ی ترک [۵] (در اینجا زاویه‌ی α برابر صفر است و زاویه‌ی β و کاربرد ندارند)

برای استفاده از توزیع تنش معادلات (۲۷) دو ثابت A و B که در واقع ثابت‌های حل هستند که باید از روی شرایط مرزی محاسبه گردند را به طور دلخواه مقدار دهی می‌کنیم.



شکل (۲) ترکیب روش بدون المان و المان محدود

اتصال دو ناحیه‌ی حل بدون المان و المان محدود به ترتیب زیر انجام می‌پذیرد که بین دو ناحیه‌ی حل، یک ناحیه‌ی گذار تعریف می‌شود شکل (۳). در این ناحیه هم گره‌های روش بدون المان و هم المان بندی روش المان محدود وجود دارد. توابع شکل روش المان محدود از قبل معلوم است و توابع شکل ناحیه‌ی بدون المان به روش توضیح داده شده بدست می‌آید. بنابراین، تنها باید توابع شکل روش بدون المان در ناحیه‌ی فصل مشترک محاسبه شود.



شکل (۳) ناحیه فصل مشترک (Interface) بین دو منطقه بدون المان (MM) و المان محدود (FEM)

توابع شکل فصل مشترک نیز از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

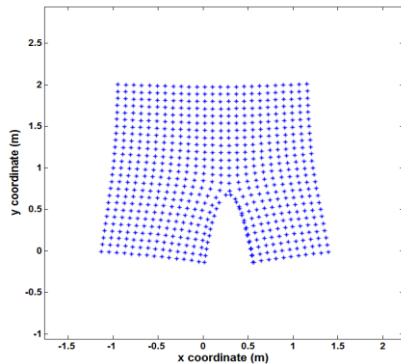
$$A(x)\gamma = p(x) - \sum_j p(x_j)N_j(x) \quad (25)$$

که در آن x_j گره J -ام در المان محدودی است که نقطه‌ی مورد علاقه‌ی x در آن واقع شده است.

در معادله‌ی بالا تنها باید گره‌های مشترک را به عنوان x_j قرار داد. $N_j(x)$ در این معادله عبارت است از مقدار تابع

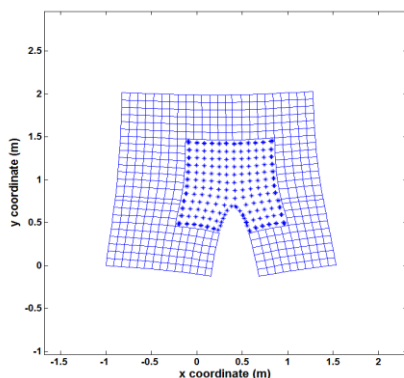
$$T = \left\{ \sqrt{F} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{F} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{F} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{F} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (28)$$

که در آن T فاصله شعاعی نقطه ی مورد علاقه از نوک ترک و θ زاویه ی خط واصل آنها از ضلع ترک است. طریقه اضافه کردن این توابع پایه مانند مراحل به کار رفته برای توابع چند جمله ای در معادله (۱۵) است [۳]. در روش RPIM می توان با صرف نظر کردن از نقاط پشت ترک هنگام محاسبه ی سهم هر گره اثر ترک را منظور کرد.



شکل (۶) ورق ترک دار تغییر شکل یافته با روش درون یابی شعاعی به همراه غنی سازی

در صورت وجود ترک بهتر است ناحیه ی اطراف نوک ترک که گرادیان های تنش در آن زیاد است، با استفاده از روش بدون المان و نواحی دوردست که از اهمیت کمتری برخوردار است با استفاده از روش المان محدود مدل شود. به این ترتیب هم از مزیت روش بدون المان برای مدل سازی دقیق تر ترک سود برده ایم و هم افت سرعت زیادی را متحمل نشده ایم (شکل ۷).

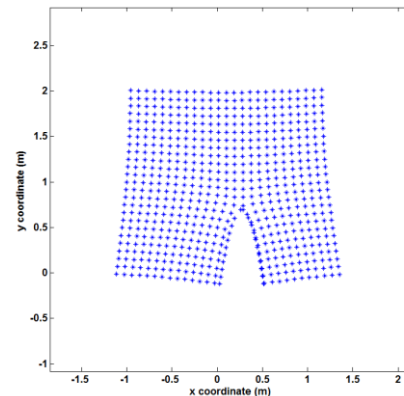


شکل (۷) ترکیب روش بدون المان RPIM و روش المان محدود برای مدل سازی مسئله

در ادامه، از روی معادلات بدست آمده برای تنش، مقادیر تنش را روی مرزهای مسأله ی ترک دار شکل (۱) محاسبه می کنیم. با اعمال این مقادیر تنش به عنوان شرایط مرزی مسأله در روش های بدون المان ارائه شده، تنش نرمال را روی خط گسترش ترک (خط $\theta = 0$ در شکل (۴)) محاسبه می کنیم. با مقایسه ی این مقدار تنش با مقدار محاسبه شده از روی معادلات (۲۷) می توان صحت و دقت روش های عددی مورد بررسی را آزمایش کرد.

۷- نتیجه گیری

شکل تغییر شکل یافته مسئله ترک دار با استفاده از روش EFG و توزیع گره های منظم 25×25 و ضریب بزرگی نمایی ۱۰۰ برابر تغییرات در شکل (۵) نشان داده شده است. همانطور که در شکل نیز مشاهده می شود یک ردیف گره اضافی در دو طرف ترک افزوده شده است. این گره ای اضافی به منظور جلوگیری از تکین شدن دستگاه های معادلات خطی مربوط به گره های مجاور ترک است که وجود ترک باعث شده تعداد گره های موجود در دامنه اثر آنها کم شود.

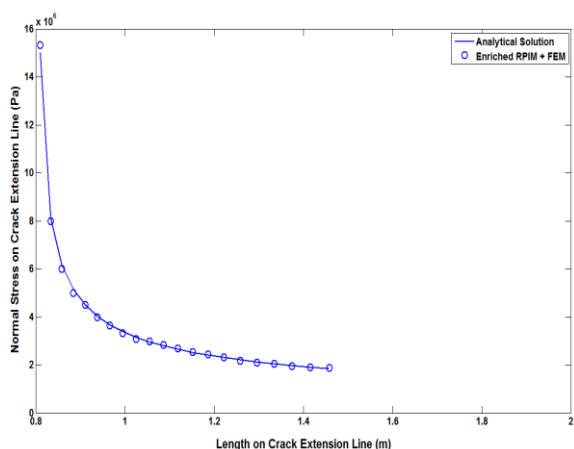


شکل (۵) ورق ترک دار تغییر شکل یافته با روش بدون المان گالرکین

در روش دیگر (که روش بهتری است)، می توان یک سری توابع پایه با شکل خاص که از روی پاسخ تحلیلی تغییر شکل مود I به دست می آیند را به توابع پایه مسئله اضافه کرد (غنی سازی^۱):

^۱Enrichment

در شکل (۱۰) مقدار تنش تنها در ناحیه ی بدون المان رسم شده است. انطباق بهتر این حالت نسبت به شکل (۹) به دلیل چگالی بیشتر گره های بدون المان است



شکل (۱۰) مقایسه ی پاسخ روش بدون المان RPIM غنی سازی شده متصل شده به روش المان محدود با پاسخ تحلیلی معادله ی (۲۷)

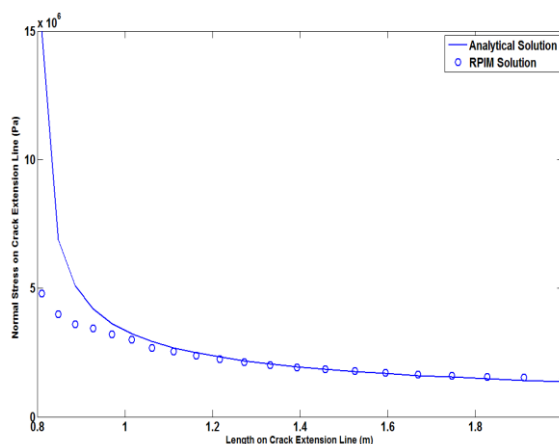
۸- جمع بندی

۱- صحت سنجی راهکار ارائه شده با استفاده از یک توزیع تنش تحلیلی انجام شده است که نشان از درستی پیاده سازی های بکار رفته دارد. در جریان این صحت سنجی نشان داده شده که اثر مثبت غنی سازی بر روی دقت تنش پیش بینی شده بسیار زیاد است. راهکار اتصال پیشنهاد شده نیز به سرعت رسیدن به این پاسخ دقیق می افزاید.

۲- راهکار کوپلینگ ارائه شده این امکان را به ما می دهد که بدون ایجاد تغییر در ناحیه ی مربوط به المان محدود و یا ایجاد محدودیت برای ناحیه ی بدون المان، این دو ناحیه را به هم متصل کرد. همچنین در جریان این کوپلینگ هیچ گونه متغیرهای اضافی ایجاد نمی شود. نشان داده شد که با استفاده از روش کوپلینگ ارائه شده، دقت افزایش پیدا می کند و زمان حل کاهش می یابد.

۳- یکی از مزایای روش های بدون المان امکان افزودن دلخواه گره ها است. به این ترتیب می توان در هر جایی از میدان حل که نیاز به دقت بیشتری است، چگالی نقاط را افزایش داد و نیازی به المان بندی مجدد نیست.

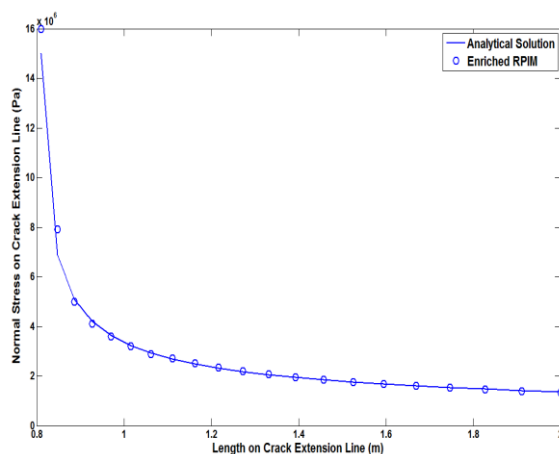
مقایسه پاسخ روش RPIM و پاسخ تحلیلی در شکل (۸) آمده است. مقدار تنش نرمال روی خط گسترش ترک آورده شده است. مقادیر پارامترهای A و B در معادله ی (۲۷) به ترتیب برابر 5.0×10^4 و صفر در نظر گرفته شده است.



شکل (۸) مقایسه ی پاسخ روش بدون المان RPIM با پاسخ تحلیلی معادله ی (۲۷)

همانطور که از شکل (۸) پیدا است، مقدار تنش پیش بینی شده توسط روش بدون المان بدون غنی سازی با نزدیک شدن به نوک ترک (سمت چپ نمودار تنش) از مقدار تحلیلی فاصله می گیرد.

همانطور که از شکل (۹) مشخص است انطباق خیلی خوب پاسخ حاصل از روش بدون المان RPIM با پاسخ تحلیلی به دلیل استفاده از طبیعت میدان حل در معادلات روش با استفاده از غنی سازی است.



شکل (۹) مقایسه پاسخ روش بدون المان RPIM غنی سازی شده با پاسخ تحلیلی معادله ی (۲۷)

۴- مزیت دیگر این روش ها به دست آوردن پاسخ های پیوسته است. میدان های جابجایی و تنش در المان محدود پیوسته و هموار نیستند. اما در روش بدون المان نیاز به هیچ گونه عملیات Post-Processing، میدان های حاصل پیوسته اند.

مراجع

- [1] Dufot, M., Hung, N.-D., , “Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* , vol-168, 2004 , pp.155–164.
- [2] Rao, B.N., Rahman, S, “A Coupled Meshless Finite Element Method for Fracture Analysis of Cracks”, *International Journal Pressure Vessels and Piping* , vol-78,, 2001 , pp.647-657.
- [3] Gu, Y.T., Wanga, W., Zhang, L.C., Feng, X.Q, “An enriched radial point interpolation method (e-RPIM) for analysis of crack tip fields”, *Engineering Fracture Mechanics* , vol-78, , 2011, pp.175–190.
- [4] Liu, G.R., “MESHFREE METHODS Moving Beyond the Finite Element Method”, by Taylor and Francis Group, LLC,2010.
- [5] Sadd, M.H., “Elasticity – Theory, Applications, and Numerics,” Burlington, USA, Elsevier ,2005.

