

بررسی اثر موقعیت سوراخ بر تابع تنش و توزیع تنش در صفحه سوراخ دار به روش حل صریح و عددی

افشین بخشایی^۱، محمد هاشمیان^{۲*}

* نویسنده مسئول: hashemian@iaukhsh.ac.ir

چکیده

در مقاله حاضر تحلیل تنش و حل صریح تنش برای صفحه‌ی مستطیلی با سوراخ دایره‌ای با محل اختیاری، تحت تنش نرمال خطی که به دولبه‌ی آن وارد می‌شود مورد بررسی قرار گرفته است. تابع تنش ایری و توزیع تنش اطراف سوراخ دایره‌ای شکل بدست آمده است. در این روش از توری دو بعدی الاستیسیته با استفاده از تابع تنش ایری استفاده شده است. روش ارائه شده برای حل صریح و بدست آوردن تابع تنش ایری از روش‌های قبلی حل صریح قوی‌تر و ساده‌تر است. با استفاده از تابع تنش و تنش در مختصات قطبی، توزیع تنش اطراف سوراخ دایره‌ای شکل محاسبه شده است. با استفاده از رابطه تنش ایری بدست آمده معادله توزیع تنش اطراف دایره بدست آمده و نمودار آن رسم شده و با توزیع تنش حاصل از روش المان محدود در نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. این مقاله صحت این روش حل را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که توزیع تنش حاصل از تابع تنش از محل سوراخ مستقل بوده و فقط به اندازه سوراخ بستگی دارد.

واژه‌های کلیدی

صفحه سوراخ دار، تابع تنش ایری، سوراخ دایره‌ای، حلقه تنش

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۱- مقدمه

که ماکزیمم توزیع تنش اطراف سوراخ دایره‌ای شکل بی بعد است بدست آمده و نشان داده شده که توزیع تنش اطراف سوراخ از محل قرارگیری سوراخ دایره‌ای مستقل بوده و فقط به اندازه شعاع سوراخ بستگی دارد. همچنین توزیع تنش اطراف سوراخ دایره‌ای توسط نرم‌افزار آباکوس بررسی شده که با جابجایی موقعیت سوراخ بدون تغییر مانده و نشان داده شده است که توزیع تنش اطراف سوراخ از محل این سوراخ مستقل بوده و صحت روش استفاده شده را نشان داده است.

۲- روش حل صریح

در شکل (۱) صفحه سوراخ دار مستطیلی شکل به ابعاد $L \times h$ که طول آن L و عرض آن h است و سوراخ به شعاع R و محل غیر مشخص نشان داده شده است. ابعاد صفحه در مقایسه با سوراخ بزرگ‌تر در نظر گرفته می‌شود. مرکز مختصات دکارتی (X, Y) در مرکز صفحه مستطیلی شکل قرار داده شده است. با انتقال (X, Y) به مرکز سوراخ دایره‌ای مختصاتی در سیستم کارترین (x, y) در نظر گرفته می‌شود و سیستم مختصاتی در سیستم قطبی (r, θ) منطبق بر مرکز دایره در نظر گرفته می‌شود. محورهای X و Y موازی با محورهای x و y در نظر گرفته می‌شود مختصات مرکز دایره در سیستم مختصاتی به صورت X برابر a و Y برابر b در نظر گرفته می‌شود.

ابتدا با توجه به صفحه مستطیلی بدون سوراخ تحت تنش نرمال خطی، تنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{xx}^{\circ} = \frac{\partial^2 \varphi^{\circ}}{\partial Y^2} = -\sigma^{\circ}, \sigma_{yy}^{\circ} = \frac{\partial^2 \varphi^{\circ}}{\partial X^2} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{xy}^{\circ} = \frac{\partial^2 \varphi^{\circ}}{\partial x \partial y} = 0$$

که φ° تابع بنیادین تنش ایری و σ° تنش فشاری وارد بر لبه‌ی صفحه سوراخ دار است.

مطالعات و تحقیقات گسترده‌ای در رابطه با رفتار مکانیکی صفحه‌ی سوراخ دار انجام شده است. این تحقیقات با سه رویکرد اصلی غلظت تنش [۱-۳]، ارتعاش صفحه، کماتش و شکست صفحه سوراخ دار انجام شده است. روش‌های گوناگونی برای این صفحات سوراخ‌دار مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. روش المان محدود پرکاربردترین روش برای مطالعه بر روی صفحات سوراخ دار می‌باشد. در سال ۲۰۱۰ بینگ چنگ و جینگ چنگ زاو و بر روی رفتار کماتش الاستو-پلاستو صفحه‌ی فولادی تحت بار غیر محوری به روش المان محدود پرداختند [۴]. روش‌های دیگری نیز برای مطالعه صفحات سوراخ‌دار مورد استفاده قرار گرفته است مانند روش حل عددی، روش حل تجربی، روش ریتز روش حل سه بعدی الاستیسته و غیره. در سال ۲۰۱۴ مایکل زاپالاتور و پائولو لازارین با استفاده از معادلات حاکم در الاستیسته‌ی سه بعدی به مطالعه میدان تنش الاستیک صفحه نازک تحت بار مختلف قبل از ایجاد شکاف پرداختند [۵]. بیشتر شکل سوراخ‌ها به شکل بیضوی، دایره‌ای و مستطیلی بوده است. در سال ۲۰۰۹ امانوئل مایرونا و همکاران به بررسی کماتش و پس کماتش لوله با سوراخ دایره‌ای و مستطیلی پرداختند و بهترین محل برای سوراخ را بدست آوردند [۶]. تاکنون برای حل صفحات سوراخ دار با محل سوراخ غیر مشخص دایره، تحت تنش نرمال خطی از دو طرف روش حل صریح گزارش نشده است.

در تحقیق حاضر روش حل صریح برای محاسبه‌ی تنش در صفحه سوراخ دار تحت بار فشاری لبه‌ای مورد مطالعه قرار گرفته تابع تنش ایری به این روش محاسبه شده و با استفاده از رابطه بین تنش ایری و تنش در مختصات قطبی تنش، معادله تنش اطراف سوراخ دایره شکل بدست آمده است. معادله غلظت تنش اطراف سوراخ دایره‌ای شکل

حال باید تابع تنش از مختصات کارتزین به مختصات قطبی انتقال پیدا کند برای این کار از انتقال $y = r \sin \theta$ استفاده می شود و همچنین برای مراحل بعدی، ساده سازی، از روابط مثلثاتی (۸) استفاده می شود.

$$\sin^2 \theta = \frac{(1 - \cos 2\theta)}{2} \quad (۸)$$

بنابراین با استفاده از انتقال به سیستم قطبی و همچنین استفاده از رابطه (۸) تابع تنش به صورت زیر تشکیل می شود.

$$\varphi^{\circ} = \frac{\sigma_0}{4} (r^2 \cos 2\theta - r^2) \quad (۹)$$

باتوجه به معادلات حاکم (۲) و همچنین انتقال آن به مختصات قطبی معادله حاکم، عملگر دیفرانسیلی لاپلاسی ∇^2 به صورت معادله (۱۰) قابل مشاهده است.

$$\nabla^4 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (۱۰)$$

و بای-هارمونیک عملگر دیفرانسیلی ∇^4 با توجه به رابطه (۲) به صورت معادله (۱۱) قابل محاسبه است.

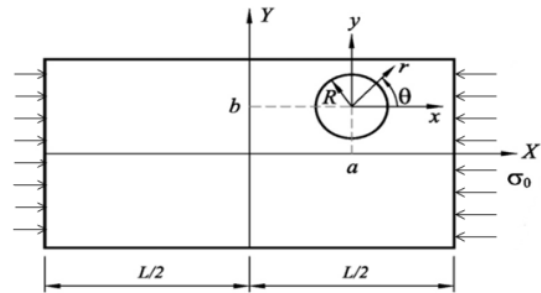
$$\nabla^4 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) * \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (۱۱)$$

در مختصات قطبی و با توجه به رابطه بین تنش و تابع تنش در مختصات قطبی، تنش اجزاء در صفحه مستطیلی بدون سوراخ به صورت معادله (۱۲) و معادله (۱۳) قابل ارائه است.

$$\sigma_{rr}^{\circ} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\frac{\sigma_0}{4} (2 \cos 2\theta + 2) \quad (۱۲)$$

$$\sigma_{r\theta}^{\circ} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = -\frac{\sigma_0}{4} (2 \sin 2\theta) \quad (۱۳)$$

با برگشت به مسئله اصلی یعنی صفحه سوراخ دار مستطیلی با موقعیت غیر مشخص در میابیم که در صفحه سوراخ دار، تنش های نرمال σ_{rr} و برشی $\sigma_{r\theta}$ در اطراف سوراخ برابر صفر باشد. اما در معادلات (۱۲) و (۱۳) که با در نظر گرفتن رابطه بین تنش ها و تابع تنش، از معادله (۷) ایجاد شده، این مقادیر صفر نشده است. بنابراین در معادله (۷) بردارهای تنش اضافی وجود دارد که برای رسیدن به معادله اصلی تابع تنش، باید این بردارهای تنش اضافی حذف شود تا به تابع تنش ایری درست



شکل (۱) صفحه سوراخ دار مستطیلی شکل با سوراخ به شعاع R و محل غیر مشخص

تابع بنیادی تنش ایری φ° بدون حضور نیروهای خارجی در شرایط الاستیک باید معادله (۲) را ارضاء نماید.

$$\nabla^4 \varphi = \nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0 \quad (۲)$$

که عملگر دیفرانسیلی لاپلاسی ∇^2 به صورت زیر تعریف می شود.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \quad (۳)$$

و ∇^4 عملگر دیفرانسیل غیر هارمونیک است که به وسیله رابطه $\nabla^4 (\nabla^4)$ به صورت زیر بدست می آید.

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial Y^4} + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial X^2 \partial Y^2} \right) + \frac{\partial^4}{\partial X^4} \quad (۴)$$

در صفحه سوراخ دار در مختصات کارتزین و سیستم مختصاتی (X, Y) با انتگرال گیری از معادله (۱) بر حسب Y معادله بنیادین تنش ایری به صورت زیر بدست می آید.

$$\varphi^{\circ} = -\frac{\sigma_0}{2} Y^2 + AY + B \quad (۵)$$

که A و B ثابت های هستند که با انتگرال گیری ایجاد می شوند محورهای مختصاتی (X, Y) برای انتقال از مختصات کارتزین به مختصات قطبی ابتدا باید به مرکز دایره انتقال پیدا کنند که از انتقال $Y = (y+b)$ استفاده می شود. با جایگذاری این انتقال در معادله (۵) خواهیم داشت.

$$\varphi^{\circ} = -\frac{\sigma_0}{2} (y+b)^2 + A(y+b) + B \quad (۶)$$

پارامترهای A و B، b پارامترهای ثابت و خطی از y هستند که ایجاد تنش و کرنش نمی کنند بنابراین تابع تنش ایری بنیادی به صورت معادله (۷) قابل بیان است.

$$\varphi^{\circ} = -\frac{\sigma_0}{2} y^2 \quad (۷)$$

$$\varphi = \frac{\sigma_0}{4} [(r^2 \cos 2\theta - r^2) + c_1 R^2 r \ln r + c_1 R^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + c_3 R^2 \cos 2\theta] \quad (18)$$

در معادله فوق $c_3 - c_1$ ثابت‌های هستند که با اضافه شدن φ^* به معادله تابع تنش به در معادله ظاهر می‌شوند و باید محاسبه شوند همچنین مقادیر R نیز برای ارضاء معادلات در مراحل بعدی به معادله اضافه می‌شوند. برای محاسبه ثابت‌های C معادله تابع تنش در صفحه سوراخ‌دار بارگذاری تنش نرمال باید معادلات (۱۹) و (۲۰) ارضاء شوند که با جایگذاری رابطه (۱۸) در معادلات زیر ثابت‌های معادله محاسبه می‌شوند.

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (19)$$

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (20)$$

باجایگذاری معادله‌ی (۱۸) در معادله‌ی (۱۹) و (۲۰) پارامترهای $c_1 - c_3$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$c_1 = 2 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = -2 \quad (21)$$

باجایگذاری ثابت‌های محاسبه شده (۲۱) در معادله (۱۸) تابع تنش ایری نهایی بدست می‌آید.

$$\varphi = \frac{\sigma_0}{4} [(r^2 \cos 2\theta - r^2) - 2R^2 r \ln r - R^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} - 2R^2 \cos 2\theta] \quad (22)$$

باتوجه به رابطه بین تنش و تابع تنش ایری در مختصات قطبی برای صفحه سوراخ‌دار رابطه‌ی (۲۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (23)$$

باتوجه به تابع تنش ایری محاسبه شده مقادیر تنش به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{2} - \frac{2R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

دست پیدا کنیم. به عبارتی با مشتق‌گیری از آن‌ها تنش نرمال σ_{rr} و برشی $\sigma_{r\theta}$ برابر صفر گردیده همین دلیل نیاز به تشکیل معادله نهایی تابع تنش ایری به صورت معادله (۱۴) است.

$$\varphi = \varphi^\circ + \varphi^* \quad (14)$$

که φ^* تابع تنش ایری است که ترکشن‌های ناخواسته که در اثر φ° ایجاد می‌شود را حذف می‌کند و تنش نرمال و برشی در شعاع R به صورت معادلات (۱۵) و (۱۶) تبدیل می‌شود.

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = [\sigma_{rr}^\circ + \sigma_{rr}^*]_{r=R} \quad (15)$$

$$\sigma_{r\theta}|_{r=R} = [\sigma_{r\theta}^\circ + \sigma_{r\theta}^*]_{r=R} \quad (16)$$

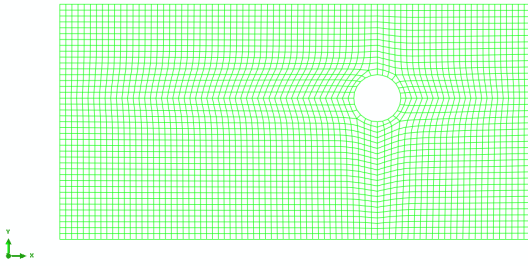
با توجه به این که در معادلات (۱۲) و (۱۳) تنش نرمال و برشی و تابع تنش اولیه تابعی از r و $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$ می‌باشد σ_{rr}^* و $\sigma_{r\theta}^*$ نیز باید تابعی از همین پارامترها باشد. جدول شماره (۱) موجود در پیوست الف پارامترهای که پتانسیل لازم برای انتخاب شدن به عنوان پارامترهای تابع تنش و φ^* که توسط داتر [۸] ارائه شده را نشان می‌دهد برای مسئله حاضر پارامترهای کاندید به صورت زیر می‌باشد.

$$r \cos 2\theta, r^2 \cos 2\theta, r^4 \cos 2\theta, r^2 \ln r, r \ln r, r^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

از این ترم‌های کاندیدا، r^2 و همچنین $r^2 \cos 2\theta$ در تابع تنش φ^0 مشترک است بنابراین، از تابع φ^* حذف شود پارامتر $r \ln r$ به علت ایجاد جابجایی چند ارزشه در u_r و u_θ از تابع φ^* حذف می‌شود. ترم $r^4 \cos 2\theta$ به علت ایجاد نقطه تکین در تنش و جابجایی در بینهایت، حذف می‌شود و همچنین $r^2 \ln r$ به علت جابجایی u_θ و نقطه تکین در تنش نرمال در بینهایت، از تابع φ^* حذف می‌شود. بنابر این تابع تنش ایری φ^* به صورت پارامترهای معادله (۱۷) قابل بیان است.

$$\varphi^* = r \ln r, \frac{\cos 2\theta}{r^2}, \cos 2\theta \quad (17)$$

با توجه به معادله (۱۷) معادله نهایی تابع تنش ایری φ به صورت معادله (۱۸) قابل بیان است.



شکل (۳) مدل مش بندی شده‌ی صفحه سوراخ دار با موقعیت غیر مشخص

۴- بحث بر روی نتایج

حل به روش صریح و استخراج تابع تنش به این روش و با استفاده از جدول ارائه شده توسط دانتر [۸] بسیار ساده تر از روش‌های ارائه شده قبلی است. با حل مسئله با این روش تنش‌های نرمال و برشی σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$ اطراف سوراخ به راحتی محاسبه می‌شود. تغییرات توزیع تنش اطراف سوراخ (غلظت تنش) با بی بعد سازی حلقه تنش اطراف سوراخ توسط رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود.

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0} \Big|_{r=R} = 2\cos 2\theta - 1 \quad (27)$$

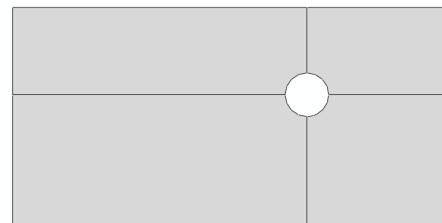
با رسم نمودار رابطه (۲۵) در θ از صفر تا 360° شکل توزیع تنش اطراف سوراخ برای تنش $8/1 \text{ Mpa}$ بدست می‌آید که در شکل (۴) قابل مشاهده است. با بررسی رابطه (۲۵) به روشنی دیده می‌شود که غلظت تنش اطراف سوراخ از محل قرار گیری سوراخ مستقل می‌باشد. برای بررسی این موضوع شکل غلظت تنش اطراف سوراخ توسط نرم افزار آباکوس نیز مورد بررسی قرار گرفته و برای بررسی اینکه آیا غلظت تنش از محل قرار گیری سوراخ مستقل است در آباکوس سوراخ در موقعیت‌های مختلف در بالا سمت راست، بالا سمت چپ، پایین سمت راست، مرکز صفحه و یک موقعیت اتفاقی مورد بررسی قرار گرفته است. با بررسی نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که با تغییر محل سوراخ شکل توزیع تنش اطراف سوراخ ثابت باقی می‌ماند و تغییری در آن مشاهده نمی‌شود که در شکل‌های (۵) تا (۹) قابل مشاهده است. همچنین مقدار ماکزیمم تنش برای

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0 \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right\} \quad (25)$$

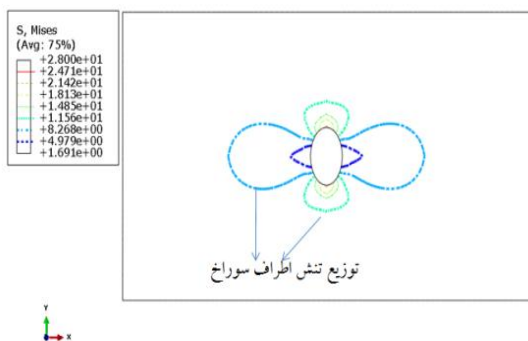
$$\sigma_{r\theta} = \sigma_0 \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{2r^4} \right) \sin 2\theta \right\} \quad (26)$$

۳- شبیه سازی عددی

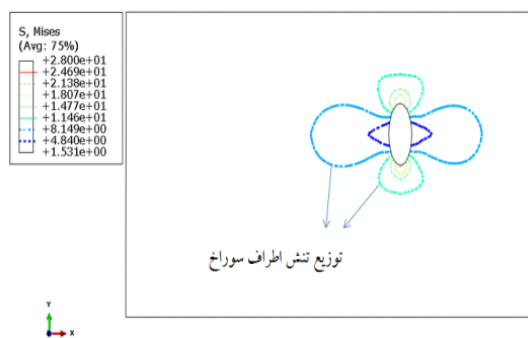
تحلیل عددی به کمک نرم افزار المان محدود آباکوس صورت گرفته است. برای تحلیل عددی ابتدا باید نمونه در نرم افزار مدل سازی شود. نمونه ایجاد شده به صورت صفحه فولادی با چگالی $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ مدول یانگ $M=210000$ و ضریب پواسون $\nu=0.3$ در نظر گرفته شده است که دارای طول ۴۰ میلی‌متر و عرض ۲۰ میلی‌متر می‌باشد. سوراخ دارای قطری برابر با ۲ میلی‌متر می‌باشد. این مدل در محیط پارت نرم افزار آباکوس مدل سازی شده و برای اینکه در مرحله مش بندی مش اطراف سوراخ منظم تشکیل شود از پارتیشن بندی در مدل سازی استفاده شده که در شکل (۲) قابل مشاهده است. به منظور تحلیل صفحه، مدل ساخته شده باید مش بندی شود. این تحلیل در دو بعد و به صورت کرنش صفحه‌ای انجام می‌شود لذا مش آن به صورت CPE4R: A 4-node bilinear plane strain مربعی چهار گوش، منظم و کرنش صفحه‌ای انتخاب می‌شود. در اطراف سوراخ مش بندی برای افزایش دقت حل ریزتر در نظر گرفته شده است که پس از قرار دادن چهار مش و انجام تحلیل با اندازه مش متفاوت، مش با اندازه حد اکثر 0.2 میلی‌متر و حداقل 0.4 میلی‌متر همگرا شد و مورد استفاده در تحلیل قرار گرفت. مش بندی نمونه در شکل (۳) قابل مشاهده است.



شکل (۲) مدل پارتیشن بندی شده صفحه سوراخ دار با موقعیت غیر مشخص ایجاد شده در محیط پارت



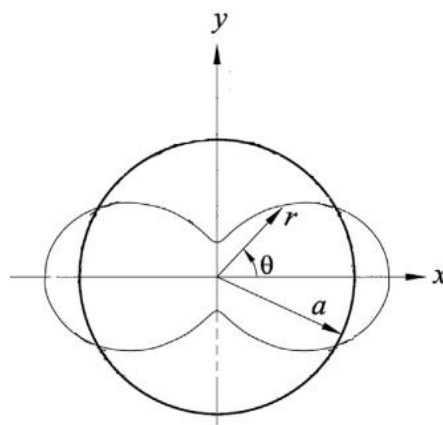
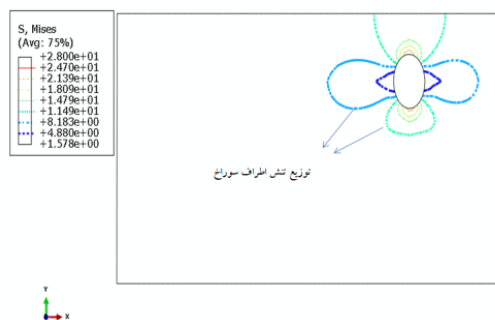
شکل (۸) غلظت تنش اطراف سوراخ برای سوراخ پایین مرکز صفحه



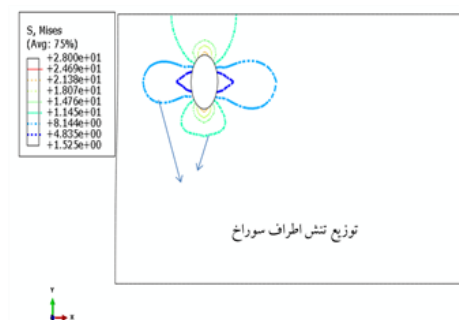
شکل (۹) غلظت تنش اطراف سوراخ برای سوراخ با موقعیت اختیاری

به منظور بررسی صحت روش حل در استخراج تابع تنش و سپس بدست آورد تنش‌ها شکل توزیع تنش اطراف سوراخ به روش صریح توسط رابطه (۲۵) برای تنش $8/1 \text{ Mpa}$ رسم شده و با شکل بدست آمده از نحوه توزیع تنش در نرم افزار آباکوس برای تنش $8/1 \text{ Mpa}$ مقایسه شده که یکسان بودن شکل در حل به این دو روش نشان از درستی روش حل صریح برای استخراج تابع تنش را بیان می‌کند این مسئله در شکل (۱۰) قابل مشاهده است. که در شکل (۱۰) الف توزیع تنش رسم شده توسط حل صریح و شکل (۱۰) ب توزیع تنش بدست آمده به کمک نرم افزار آباکوس را نشان می‌دهد. یکسان بودن این توزیع صحت روش ارائه شده برای استخراج تابع تنش را نشان می‌دهد.

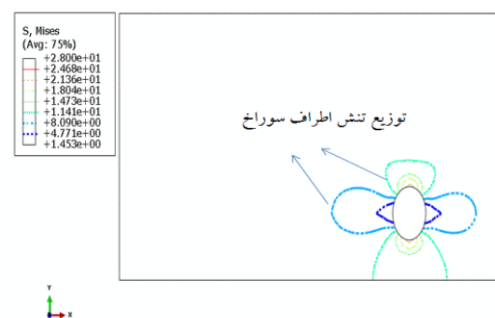
همه این موقعیت‌ها بدست آمده که مقدار آن در مختصات کارترین برابر با 28 Mpa می‌باشد که این مقدار برابر، درستی روابط (۲۴) و رابطه (۲۵) را اثبات می‌کند.

شکل (۴) غلظت تنش رسم شده در اطراف سوراخ برای تنش $8/1 \text{ Mpa}$ 

شکل (۵) غلظت تنش اطراف سوراخ برای سوراخ بالا سمت راست



شکل (۶) غلظت تنش اطراف سوراخ برای سوراخ بالا بالاسمت چپ



شکل (۷) غلظت تنش اطراف سوراخ برای سوراخ پایین سمت راست

پیوست‌ها

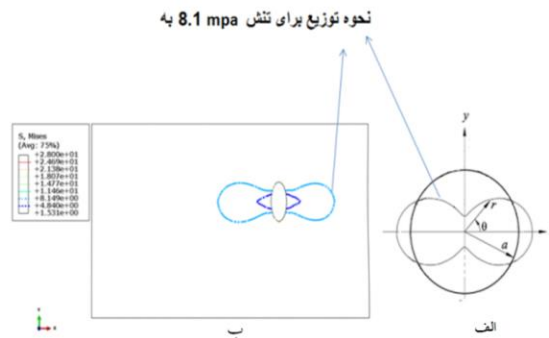
جدول (۱) پارامترهای دارای پتانسیل برای قرارگیری در تابع تنش، ارائه

شده توسط دانتز

φ	σ_{rr}	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$
r^2	2	0	2
$\ln r$	$\frac{1}{r^2}$	0	$-\frac{1}{r^2}$
$r^2 \ln r$	$2 \ln r + 1$	0	$2 \ln r + 3$
$r^3 \sin \theta$	$2r \sin \theta$	$-2r \cos \theta$	$6r \sin \theta$
$r \theta \cos \theta$	$-2 \frac{\sin \theta}{r}$	0	0
$\frac{\sin \theta}{r}$	$-2 \frac{\sin \theta}{r^3}$	$\frac{\cos 2\theta}{r^2}$	$\frac{2 \sin \theta}{r^3}$
$r \ln r \sin \theta$	$\frac{\sin \theta}{r}$	$\frac{2 \cos \theta}{r^3}$	$2 \cos \theta$
$r^2 \cos 2\theta$	$-2 \cos 2\theta$	$2 \sin 2\theta$	$2 \cos 2\theta$
$r^4 \cos 2\theta$	0	$6r^2 \sin 2\theta$	$12r^2 \cos 2\theta$
$\frac{\cos 2\theta}{r^2}$	$-6 \frac{\cos 2\theta}{r^4}$	$-6 \frac{\sin 2\theta}{r^4}$	$6 \frac{\cos 2\theta}{r^4}$
$\cos 2\theta$	$-4 \frac{\cos 2\theta}{r^2}$	$-2 \frac{\sin 2\theta}{r^2}$	0
$r^3 \sin 3\theta$	$6r \sin 3\theta$	$6r \cos 3\theta$	$6r \sin 3\theta$
$r^5 \sin 3\theta$	$-4r^3 \sin 3\theta$	$-12r^3 \cos 3\theta$	$20r^3 \sin 3\theta$
$\frac{\sin 3\theta}{r^3}$	$-12 \frac{\sin 3\theta}{r^5}$	$12 \frac{\cos 3\theta}{r^5}$	$12 \frac{\sin 3\theta}{r^5}$
$\frac{\sin 3\theta}{r}$	$-10 \frac{\sin 3\theta}{r^3}$	$6 \frac{\cos 3\theta}{r^3}$	$2 \frac{\sin 3\theta}{r^3}$

مراجع

- [1] Zhong H, Yu T., A weak form quadrature element method for plane elasticity problems, *Applied Mathematics Modeling*, Vol. 33, 2009, pp. 3801–3814.
- [2] Zhang T., Liu T.G., Zhao Y., Liu J.X., Analysis of stress field of finite plates weakened by holes, *Journal of Huazhong University Science Technology*, Vol. 30, 2002, pp. 87–89.
- [3] Li Q., Shen S., Han Z.D., Atluri S.N., Application of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) to Problems with Singularities, and Material Discontinuities, in 3-D Elasticity *CMES, Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 4, No. 5, 2003, pp. 571–586.
- [4] Cheng B., Zhao J., Strengthening of perforated plates under uniaxial compression buckling analysis, *Thin-Walled Structures*, Vol. 48, 2010, pp. 905–914.



شکل (۱۰): مقایسه توزیع تنش به روش حل صریح و عددی (الف) به

روش حل صریح (ب) با استفاده از نرم افزار آباکوس

۵- نتیجه گیری

- ۱- غلظت تنش برای صفحه تحت تنش نرمال از محل قرارگیری سوراخ مستقل بوده که روابط بدست آمده برای تنش و نتایج بدست آمده به کمک آباکوس این را نشان می‌دهد.
- ۲- یکسان بودن نتایج حاصل از روش حل صریح با روش حل عددی به کمک نرم افزار آباکوس صحت روش ارائه شده برای بدست آوردن تابع تنش و غلظت تنش اطراف سوراخ را نشان می‌دهد.
- ۳- در روش ارائه شده برای بدست آوردن تابع تنش از جدول دانتز [۸] بدست می‌آید و این روش از روش‌های قبلی برای بدست آوردن تابع تنش ساده تر است.

- [5] Zappalorto M., Lazzarin P., Three-dimensional elastic stress fields ahead of notches in thick plates under various loading conditions, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 108, 2013, pp. 75–88.
- [6] Emanuele M., Carlo P., Claudio M., Elastic stability of plates with circular and rectangular holes subjected to axial compression and bending moment, *Thin-Walled Structure*, Vol. 74, 2009, pp. 241–255.
- [7] Viola E., Tornabene F., Ferretti E., Fantuzzi N., Soft core plane state structures under static loads using GDQFEM and cell method, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 94, No. 4, 2013, pp. 301-329.
- [8] Li-Sheng W., Fu. A., first course in elasticity, The Ohio State University, 1996, 205, pp.205–209. (From class notes of Professor J. Dundurs of Northwestern University, Evanston).
- [9] Li Y., Fantuzzi N., Tornabene F., On mixed mode crack initiation and direction in shafts: strain energy density factor and maximum tangential stress criteria, *Engineer Fracture Mechanics*, Vol. 109, 2013, pp. 273–289.
- [10] Viola E., Tornabene F., Ferretti E., Fantuzzi N., On static analysis of composite plane state structures via GDQFEM and cell method, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 94, No. 5, 2013, pp. 421–58.
- [11] Viola E, Tornabene F, Ferretti E, Fantuzzi N, GDQFEM numerical simulations of, continuous media with cracks and discontinuities, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol. 94, No. 4, 2013, pp. 331–369.