

## بررسی اثر بستر و ترک بر فرکانس طبیعی تیر تیموشنکو به روش اجزاء محدود

افشین منوچهری فر<sup>۱</sup>، سید فرید ابطحی<sup>۲\*</sup>

\* نویسنده مسئول: Faridabtahi366@yahoo.com

### واژه‌های کلیدی

روش اجزاء محدود، تیر تیموشنکو، ترک، بستر

### چکیده

در این تحقیق، محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات خمشی تیرهای بدون ترک و ترک‌دار تیموشنکو با شرایط مرزی مختلف به روش اجزاء محدود مورد نظر است. روش مورد استفاده در این پژوهش، روش انرژی است. در اینجا با استفاده از روش انرژی و در نظر گرفتن تئوری تیر تیموشنکو، ماتریس‌های سختی و نرمی برای تیر بدون ترک استخراج می‌شود. سپس به منظور اعمال شرایط ترک، از ماتریس سختی المان ترک‌دار استفاده می‌شود و با وارد کردن شرایط مرزی دو طرف تیر، فرکانس‌های طبیعی تیر بدست می‌آیند. پس از آن با اعمال اثر بستر در معادلات، تأثیر بستر بر فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- کارشناس ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

## ۱- مقدمه

عمق ترک بدست آورد. او به کمک آنالیز مودال تجربی فرکانس‌های تجربی را به منظور ارزیابی روش خود استخراج کرد.

سیلوا و گومز<sup>۴</sup> [۲] با انجام تحلیل مودال تجربی بر روی شانزده تیر ترک‌دار دارای تکیه‌گاه آزاد، فرکانس‌های تجربی اول تا چهارم را استخراج کرده، تأثیر محل و عمق ترک را بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی نمودند.

کیان<sup>۵</sup> و همکاران [۳] ماتریس سختی یک المان دارای ترک را از طریق انتگرال‌گیری از ضرایب شدت تنش بدست آوردند. آن‌ها مدل المان محدود تیر ترک‌دار را استخراج نموده، با اعمال این مدل بر یک تیر یکسر گیردار ترک‌دار، فرکانس‌های طبیعی را برای حالت‌های مختلف ترک محاسبه نمودند. سپس با مقایسه فرکانس‌های حاصل از اجزاء محدود و تحلیل مودال تجربی به بررسی دقت روش خود پرداختند.

پندی و بیسواز<sup>۶</sup> [۴] با محاسبه تغییرات ماتریس نرمی در اثر ایجاد ترک به پیش‌بینی محل ترک پرداختند. آن‌ها با محاسبه شکل مود و فرکانس‌های تجربی تیر سالم و ترک‌دار به تعیین ماتریس‌های نرمی تیر سالم و ترک‌دار اقدام نمودند. سپس با مطالعه تغییرات ماتریس نرمی تیر سالم و ترک‌دار محل و اندازه ترک را مشخص کردند.

نارکیس<sup>۷</sup> [۵] ارتعاشات محوری و عرضی تیر ترک‌دار با شرایط تکیه‌گاهی ساده را بررسی نمودند. آن‌ها با مدل‌سازی ترک با فنر پیچشی، معادلاتی جبری را بدست آوردند که برحسب فرکانس‌های طبیعی و محل و اندازه ترک بود. سپس با حل معکوس مسئله به پیش‌بینی محل و اندازه ترک پرداختند.

اطلاع از صحت سلامت سازه‌های مکانیکی، می‌تواند از بروز مشکلات جبران‌ناپذیری جلوگیری کند. میله‌ها، شافت‌ها و تیرها سازه‌هایی هستند که از آن‌ها جهت حمل و یا انتقال بار در ماشین‌ها استفاده می‌شود و شکست ناگهانی این سازه‌ها، باعث بروز آسیب‌های جدی در عملکرد ماشین‌ها می‌شود. ترک‌ها از جمله عیوبی هستند که ممکن است در سازه وجود داشته باشند و یا بر اثر بارگذاری در آن به وجود آیند. ترک‌ها به مرور زمان پیشرفت می‌کنند و در نهایت باعث شکست سازه می‌شوند. شناخت تأثیر ترک بر فرکانس‌های طبیعی سازه، می‌تواند به عنوان روشی اقتصادی، ارزان و غیر مخرب در شناسایی موقعیت ترک و عیب‌یابی سازه مورد استفاده قرار گیرد. یکی از عوامل مؤثر در فرکانس‌های طبیعی یک سازه، نشیمنگاه یا فونداسیونی است که سازه بر آن قرار گرفته است. بررسی اثر فونداسیون بر رفتار فرکانس‌های طبیعی سازه، از مواردی است که در این مقاله بررسی می‌شود.

## ۲- تاریخچه کارهای انجام‌شده

بررسی رفتار دینامیکی سازه‌های ترک‌دار موضوعی است که طی چند دهه اخیر تحقیقات زیادی بر روی آن صورت گرفته است که در زیر تعدادی از آن‌ها آورده شده است: گودمانسون<sup>۳</sup> [۱] با استفاده از ماتریس نرمی روشی برای مدل‌سازی ترک در تیر ارائه نمود. او ماتریس نرمی را به دو روش متفاوت محاسبه کرد. در روش اول با انتگرال‌گیری از ضرایب شدت تنش و در روش دوم با استفاده از اجزاء محدود به محاسبه ماتریس نرمی پرداخت. سپس با اعمال این مدل بر یک تیر یکسر گیردار، فرکانس‌های طبیعی را برای حالت‌های مختلف محل و

<sup>4</sup> Silva and Gomes

<sup>5</sup> Qian

<sup>6</sup> Pandey and Biswaz

<sup>7</sup> Narkis

<sup>3</sup> Gudmunson

بدست آوردند. سپس با حل معکوس مسئله به جستجوی محل و اندازه ترک پرداختند.

دکتر نحوی و جباری [۱۰] با استفاده از مدل اجزاء محدود و یک الگوریتم تشخیص ترک به تخمین محل و اندازه ترک پرداختند. بدین ترتیب که با فرض وجود ترک در هر یک از المان‌های اجزاء محدود، فرکانس‌های طبیعی را برای هر یک از حالت‌های ترک محاسبه نمودند. سپس با روش معکوس با معلوم بودن فرکانس‌های طبیعی به جستجوی محل و اندازه ترک پرداختند.

دکتر وکیلی باغمیشه و همکاران [۱۱] با مدل‌سازی ترک با یک فر پیچشی و حل معادله دیفرانسیل تیر به محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر در حالت‌های مختلف محل و اندازه ترک پرداختند. آن‌ها تابع هدفی<sup>۱۲</sup> را بر پایه‌ی مجموع مجذورات اختلاف‌های بین فرکانس‌های تجربی و عددی تعریف نمودند. با توجه به آنکه تابع هدف، تابعی از اندازه و محل ترک است، با استفاده از الگوریتم ژنتیک<sup>۱۳</sup> به بهینه‌سازی این تابع پرداخته و اندازه و محل ترک را بدست آوردند.

دکتر آریایی و دکتر ضیایی راد و دکتر غیور به مطالعه رفتار دینامیکی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار تحت جرم متحرک با روش DET<sup>۱۴</sup> مقایسه جواب‌های بدست آمده با جواب‌های روش FEM پرداختند. در کار آن‌ها ماتریس مجزایی برای المان ترک‌دار محاسبه می‌شود. آن‌ها ابتدا اثر نیروهای کوریولیس و گریز از مرکز را در معادلات روش DET وارد کرده سپس با بسط این معادلات برای حالت تیر ترک‌دار، فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کردند [۱۲].

لل و میتی<sup>۸</sup> [۶] ترک را با فنری پیچشی مدل نمودند. آن‌ها در حل مستقیم، با فرض معلوم بودن محل ترک و حل معادله مشخصه، فرکانس‌های طبیعی را بدست آوردند. در حل معکوس، با فرض معلوم بودن فرکانس‌های طبیعی و حل معادله مشخصه، به محاسبه‌ی سختی برحسب محل ترک و رسم نمودارهای آن پرداختند. سپس از تقاطع منحنی‌های مربوط به سه شکل مود اول، محل ترک را تعیین نمودند.

کیم و استابز<sup>۹</sup> [۷] الگوریتمی برای تشخیص ترک بر پایه‌ی تغییرات فرکانس‌های طبیعی طرح‌ریزی کردند. بدین ترتیب که محل ترک را با استفاده از رابطه‌ای که حساسیت مودال را به تغییرات فرکانس‌های طبیعی مرتبط می‌سازد، مشخص نمودند. سپس با استفاده از رابطه بین تغییرات فرکانس‌های طبیعی و انرژی کرنشی هر مود ارتعاش، به پیش‌بینی اندازه‌ی ترک پرداختند.

لین<sup>۱۰</sup> [۸] از روش ماتریس انتقال برای حل مستقیم و معکوس یک تیر با تکیه‌گاه ساده دارای ترک باز استفاده نمود. او ترک را با فنر پیچشی مدل کرده، با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و اعمال شرایط پیوستگی، معادله‌ی مشخصه را به‌طور صریح بدست آورد. این معادله مشخصه تابعی از فرکانس‌های طبیعی، محل و عمق ترک است. لین با حل معادله مشخصه محل ترک و نرمی محلی را تعیین نموده و اندازه ترک را از رابطه بین نرمی محلی با اندازه ترک بدست آورد.

سوامیداس<sup>۱۱</sup> و همکاران [۹] با استفاده از روش انرژی، صلابت خمشی تیر ترک‌دار را بدست آورده و با استفاده از آن در معادله دیفرانسیل تیر، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار را برای حالت‌های مختلف محل و عمق ترک

<sup>12</sup> Objective Function

<sup>13</sup> Genetic Algorithm

<sup>14</sup> Discrete Element Technique

<sup>8</sup> Lele and Maiti

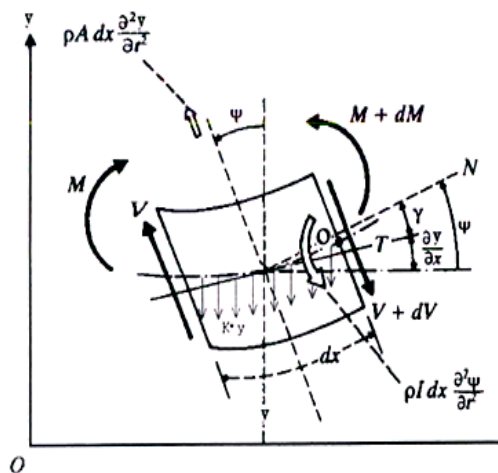
<sup>9</sup> Kim and Stubbs

<sup>10</sup> Lin

<sup>11</sup> Swamidas

(۲)

$$GAk \left[ \frac{d\psi_0(x)}{dx} - \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} \right] + k^* y_0(x) + \rho A \omega^2 y_0(x) = 0$$



شکل (۱) المان تیر تیموشنکو بر روی بستر الاستیک

## ۳-۱- تحلیل ارتعاش آزاد

اگر یک سازه الاستیک را به صورتی مناسب در لحظه  $t=0$  دچار جابجایی اولیه نمایم (یعنی با اعمال تغییر مکانهای اولیه یا قیود اولیه که به صورت مناسب انتخاب شده باشند و سپس رها کردن این قیود) می توان سازه را به ارتعاش هارمونیک واداشت. این حرکت ارتعاشی از خصوصیات سازه است و بستگی به تغییر مکان اولیه جرم و سختی سازه دارد. در صورت وجود میرایی در سازه، دامنه ارتعاش به تدریج تنزل می یابد و اگر مقدار میرایی از یک حد بحرانی تجاوز نماید، رفتار نوسانی کاملاً از بین می رود.

از طرف دیگر در صورت عدم وجود میرایی، حرکت نوسانی تا بینهایت ادامه پیدا می کند و دامنه نوسان بستگی به تغییر مکان اعمال شده اولیه خواهد داشت.

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{Q\} = 0 \quad (۳)$$

هتینی<sup>۱۵</sup> با قرار دادن تیرهای اوپلر-برنولی و تیموشنکو بر روی بستر الاستیک به حل دقیق اثر بستر بر فرکانس های طبیعی پرداخت [۱۴].

ارشاد چهارمحالی پور و دکتر نحوی به بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ترک دار و بدون ترک اوپلر-برنولی و تیموشنکو پرداختند. در کار آنها از روش حل مستقیم و تقریب معادله جابجایی تیر به فرم سینوسی استفاده شد [۱۸].

چن<sup>۱۶</sup> تیر تیموشنکو حامل بار متحرک بر روی بستر ویسکو الاستیک قرار داد. وی پس از محاسبه ماتریس سختی ناشی از اثر بستر و جمع کردن آن با ماتریس سختی تیر و با محاسبه ماتریس جرمی تیر فرکانس های طبیعی تیر را محاسبه کرد [۱۵].

## ۳- معادلات حرکت

دریک تیر تیموشنکو واقع بر بستر ارتجاعی، برای بدست آوردن معادلات حرکت و انتشار موج، ابتدا المانی از تیر را در نظر می گیریم. با ترسیم تمام نیروهای وارده به المان، معادلات حاکم بر این المان را استخراج می کنیم. برای ساده شدن معادلات، بستر از نوع وینکلر در نظر گرفته شده است. بدین سبب نیروی اعمالی از زمین بر تیر به صورت  $k^* y$  است.

با در نظر گرفتن حرکت هارمونیک و با استفاده از جداسازی متغیرها، معادلات به صورت

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{i\omega t} \quad \text{و} \quad Y(x,t) = y_0 e^{i\omega t}$$

بسط داریم:

$$(۱)$$

$$EI \frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} + GAk \left[ \frac{dy_0(x)}{dx} - \psi_0(x) \right] - \rho I \omega^2 \psi_0(x) = 0$$

از طرف دیگر:

$$dM/dx - V = 0 \quad (۸)$$

می‌دانیم معادله ممان خمشی تیر به فرم زیر است:

$$M = -EI \, d\theta/dx \quad (۹)$$

ارتباط بین نیروی برشی  $V$  با کرنش برشی  $\gamma$  به صورت زیر است

$$V = k \, G \, A \, \gamma \quad (۱۰)$$

که  $k$  ضریب برشی تیموشنکو است.

از معادلات فوق، بدست می‌آوریم:

$$b_0 = -6a_3g \quad (۱۱)$$

که در آن  $g = EI/kGA$  است.

با استفاده از معادلات بالا معادله چند جمله‌ای  $\theta$  به فرم زیر بدست می‌آید:

$$\theta = a_1 + 2a_2x + (3x^2 - 6g)a_3 \quad (۱۲)$$

اکنون می‌توان ضرایب  $a_0$  تا  $a_3$  را بر حسب مجهول‌های دو سر المان بدست آورد. با فرض نقطه ۱ برای  $x=0$  و نقطه ۲ برای  $x=a$  برای المانی به طول  $a$  نتایج زیر بدست می‌آید:

$$(۱۳)$$

$$a_0 = w_1$$

$$a_1 = \frac{-12g}{a^2 + 12g} \left[ -\frac{12g}{a^2} w_1 + (a^2 + 6g)\theta_1 + \frac{12g}{a} w_2 - 6g\theta_2 \right] \quad (۱۴)$$

$$a_2 = \frac{1}{a^2 + 12g} \left[ -3w_1 - \frac{(2a^2 + 6g)}{a} \theta_1 + 3w_2 - \frac{(a^2 - 6g)}{a} \theta_2 \right] \quad (۱۵)$$

$$a_3 = \frac{1}{a^2 + 12g} \left[ \frac{2}{a} w_1 + \theta_1 - \frac{2}{a} w_2 + \theta_2 \right] \quad (۱۶)$$

در نتیجه داریم:

که در آن  $[Q]$  نشان‌دهنده تغییر مکان (به نام شکل مد و یا بردار ویژه) و  $\omega$  مشخص‌کننده فرکانس طبیعی ارتعاش است. معادله (۳) به نام مسئله مقدار ویژه جبری خطی است زیرا هیچ‌یک از دو ماتریس  $[K]$  و  $[M]$  تابعی از فرکانس  $\omega$  نیستند. این معادله به شرط آنکه دترمینان ماتریس  $([K] - \omega^2[M])$  صفر باشد دارای جواب غیر صفر برای  $\bar{Q}$  خواهد بود یعنی:

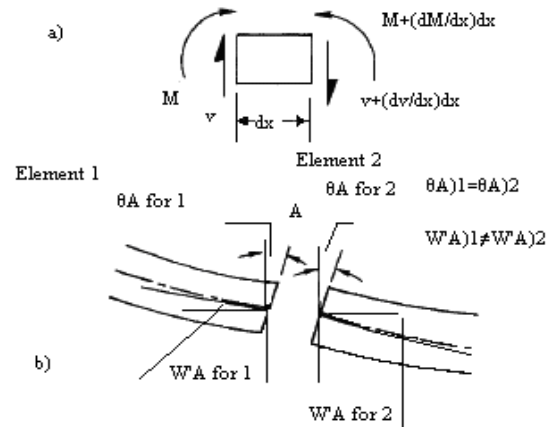
$$([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (۴)$$

در حالت کلی، همه مقادیر ویژه معادله (۴) متفاوت از یکدیگر می‌باشند. به ازای این مقادیر از فرکانس‌های طبیعی، می‌توان جواب غیر صفر برای  $\{Q\}$  بدست آورد. بردار ویژه (شکل مد) مربوط به  $j$  امین فرکانس طبیعی  $(\omega_j, Q_j)$  نام گذاری شده است.

### ۳-۲- روش حل

تابع جابجایی  $w$  را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$W = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (۵)$$



شکل (۲) a: المان تیر b: دو المان مجاور در نقطه A

با توجه به شکل (۲) داریم:

$$W' = \theta + \gamma \quad W' = \theta + \gamma \quad (۶)$$

فرض می‌کنیم کرنش برشی  $\gamma$  به  $X$  وابستگی نداشته باشد، یعنی داریم:

$$\gamma = b_0 \quad (۷)$$

با جایگذاری توابع شکل (معادلات (۱۸) و (۱۹)) و مقدار (۱۷)

زاویه برش در معادله (۲۰)، ماتریس سختی به شرح زیر بدست می‌آید:

$$U_e = \frac{1}{2} \{d\}_e^T [k_b]_e \{d\}_e + \frac{1}{2} \{d\}_e^T [k_s]_e \{d\}_e \quad (۲۱)$$

$$[k_b]_e = \int_0^a EI [\bar{N}]^T [\bar{N}] dx \quad (۲۲)$$

(۲۴) با فرض  $w = [N]\{d\}_e$  و  $\theta = [\bar{N}]\{d\}_e$  توابع شکل به فرم

زیر بدست می‌آیند:

$$[k_s]_e = \int_0^a kGA ([N_x]^T - [\bar{N}]^T) ([N_x] - [\bar{N}]) dx$$

$$[k]_e = [k_b]_e + [k_s]_e \quad (۲۵)$$

(۲۶)

$$[k_e]_r = \frac{12EI}{(a^2 + 12g)a} \begin{bmatrix} 1 & & & & sym \\ \frac{a}{2} & \frac{a^2}{3} + g & & & \\ -1 & -\frac{a}{2} & 1 & & \\ \frac{a}{2} & \frac{a^2}{6} - g & -\frac{a}{2} & \frac{a^2}{3} + g & \end{bmatrix}$$

که در ماتریس فوق  $g \equiv \frac{EI}{kGA}$  است.

به منظور محاسبه ماتریس جرمی مسئله، از معادله انرژی تیر به فرم زیر استفاده شده است:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^a \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx \quad (۲۷)$$

$$= \frac{1}{2} \{\dot{d}\}_e^T [m_i]_e \{\dot{d}\}_e + \frac{1}{2} \{\dot{d}\}_e^T [m_r]_e \{\dot{d}\}_e$$

که  $[m_r]_e$  مربوط به اثر جابجایی و  $[m_i]_e$  مربوط به تأثیر انرژی چرخشی است. ماتریس جرمی المان برابر جمع دو ماتریس  $[m_r]_e$  و  $[m_i]_e$  است. با جاگذاری توابع شکل (۱۸) و (۱۹) در رابطه (۲۷):

$$[m_r]_e = \int_0^a [N]^T \rho A [N] dx = \frac{\rho A a}{(a^2 + 12g)^2} \begin{bmatrix} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & & \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

$$w = \left[ 1 - \frac{12g}{a^2(a^2 + 12g)}x - \frac{3}{a^2 + 12g}x^2 + \frac{2}{a(a^2 + 12g)}x^3 \right] w_1 + \left[ \frac{a^2 + 6g}{a^2 + 12g}x - \frac{2a^2 + 6g}{a(a^2 + 12g)}x^2 + \frac{1}{a^2 + 12g}x^3 \right] \theta_1 + \left[ \frac{12g}{a(a^2 + 12g)}x + \frac{3}{a^2 + 12g}x^2 - \frac{2}{a(a^2 + 12g)}x^3 \right] w_2 + \left[ \frac{-6g}{a^2 + 12g}x + \frac{6g - a^2}{a(a^2 + 12g)}x^2 + \frac{1}{a^2 + 12g}x^3 \right] \theta_2$$

$$N_1 = 1 - \frac{1}{a(a^2 + 12g)}(12gx + 3ax^2 - 2x^3) \quad (۱۸)$$

$$N_2 = \frac{1}{a(a^2 + 12g)}[(a^2 + 6g)ax - (2a^2 + 6g)x^2 + ax^3]$$

$$N_3 = \frac{1}{a(a^2 + 12g)}(12gx + 3ax^2 - 2x^3)$$

$$N_4 = \frac{1}{a(a^2 + 12g)}[-6gax + (6g - a^2)x^2 + ax^3]$$

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{a(a^2 + 12g)}(6x^2 - 6ax)$$

$$\bar{N}_2 = \frac{1}{a(a^2 + 12g)}[a^3 + 12ga - (4a^2 + 12g)x + 3ax^2]$$

$$\bar{N}_3 = \frac{1}{a(a^2 + 12g)}(6ax - 6x^2)$$

$$\bar{N}_4 = \frac{1}{a(a^2 + 12g)}[3ax^2 - (2a^2 - 12g)x] \quad (۱۹)$$

معادله انرژی کرنشی برای یک المان به طول  $a$  که در آن اثر برشی نیز لحاظ شده باشد به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^a EI \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a kGA \gamma^2 dx \quad (۲۰)$$

که اجزای رابطه (۲۰) به شرح زیر می‌باشند:

- طول المان  $a$
- صلبیت خمشی  $EI$
- ضریب برشی  $k$
- مدول برشی  $G$
- مساحت سطح مقطع  $A$
- زاویه برش  $\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta$

که در این رابطه  $l$  برابر طول المان است. حال اگر فرض کنیم المان  $(j-1)$  ام ترک‌دار باشد ماتریس سختی چرخشی این المان باید به‌طور جداگانه محاسبه شود. در این صورت چرخش گره  $j$  به فرم زیر نوشته می‌شود [۱۲]:

$$\theta_j = \theta_{j0} + DM_j \quad (۳۴)$$

که در این رابطه،  $\theta_j$  چرخش نسبی نقطه  $j$ ،  $\theta_{j0}$  چرخش نسبی نقطه  $j$  در غیاب ترک،  $D$  ضریب اثر ترک و  $M_j$  گشتاور خمشی در نقطه  $j$  ام است.

ثابت  $D$  با مدل‌سازی مقطع ترک‌دار با یک فنر پیچشی که دو قسمت سالم تیر را به هم وصل کرده است بدست می‌آید. سختی پیچشی فنر به کمک مکانیک شکست مطابق آنچه در مرجع [۱۲] شرح داده شده است محاسبه می‌شود.

با استفاده از مرجع [۱۲] ثابت  $D$  به فرم زیر محاسبه می‌شود که در این رابطه  $b$  ارتفاع مقطع و  $a$  عمق ترک است:

$$(۳۵)$$

$$\left\{ \frac{a/b}{1-a/b} \right\} \left\{ 5.93 - 19.69(a/b) + 37.14(a/b)^2 - 35.84(a/b)^3 + 13.12(a/b)^4 \right\}$$

با استفاده از روش ارائه شده در مرجع [۱۲] ماتریس سختی المان ترک‌دار برای ترک باز<sup>۱۷</sup> به شرح زیر بدست می‌آید:

$$(k_e)_{open} = k_e - \frac{D}{1 + Dk_e \langle 4,4 \rangle} (k_e \langle :,4 \rangle) (k_e \langle 4, : \rangle) \quad (۳۶)$$

در روابط بالا  $k_e$  ماتریس بدون ترک و  $k_e \langle :,4 \rangle$  و  $k_e \langle 4, : \rangle$  سطر و ستون چهارم ماتریس  $k_e$  می‌باشند.

### ۳-۴- اثر بستر

همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد بستر الاستیک با فنر خطی متصل شده به زیر تیر مدل می‌شود که انرژی کرنشی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[m_r]_e = \int_0^a [\bar{N}]^T \rho l [\bar{N}] dx \quad (۲۹)$$

$$= \frac{\rho l a}{(a^2 + 12g)^2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix}$$

$$[m]_e = [m_r]_e + [m_r]_e \quad (۳۰)$$

$$t_{11} = \left( \frac{13}{35} a^4 + \frac{42}{5} g a^2 + 48 g^2 \right)$$

$$t_{21} = \left( \frac{11}{210} a^4 + \frac{11}{10} g a^2 + 6 g^2 \right) a$$

$$t_{22} = \left( \frac{1}{105} a^4 + \frac{1}{5} g a^2 + \frac{6}{5} g^2 \right) a^2$$

$$t_{31} = \left( \frac{9}{70} a^4 + \frac{18}{5} g a^2 + 24 g^2 \right) \quad (۳۱)$$

$$t_{32} = \left( \frac{13}{420} a^4 + \frac{9}{10} g a^2 + 6 g^2 \right) a$$

$$t_{33} = t_{11}$$

$$t_{41} = -t_{32}$$

$$t_{42} = - \left( \frac{1}{140} a^4 + \frac{1}{5} g a^2 + \frac{6}{5} g^2 \right) a^2$$

$$t_{43} = -t_{21}$$

$$r_{11} = \frac{6}{5} a^4$$

$$r_{21} = \left( \frac{1}{10} a^2 - 6 g^2 \right) a^3$$

$$r_{22} = \left( \frac{2}{15} a^4 + 2 g a^2 + 48 g^2 \right) a^2$$

$$r_{31} = -r_{11}$$

$$r_{32} = -r_{21}$$

$$r_{33} = r_{11}$$

$$r_{41} = r_{21}$$

$$r_{42} = \left( -\frac{1}{30} a^4 - 2 g a^2 + 24 g^2 \right) a^2$$

$$r_{43} = -r_{21}$$

$$r_{44} = r_{22}$$

### ۳-۳- المان ترک‌دار

در روش مدل کردن ترک با فنر پیچشی لازم است بدانیم وجود ترک در یک مقطع هنگام بارگذاری، به چه میزان روی افزایش زاویه خمش در محل گسستگی تأثیر می‌گذارد. اگر المان تیر را بدون ترک فرض کنیم مقدار چرخش نسبی در نقطه  $j$  به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta_j = \frac{1}{l} \left[ (y_j - y_{j-1}) + (y_j - y_{j+1}) \right] \quad (۳۳)$$

<sup>۱</sup>Open crack

کرده است مقایسه شده‌اند که همان‌گونه که در جدول ذیل مشاهده می‌شود، پایین بودن میزان خطا، مؤید صحت محاسبات می‌باشند.

جدول (۱) مقایسه نتایج بدست آمده با مرجع [۱۸]

خطا %	نتایج مرجع [۱۸]	نتایج پروژه حاضر	
۱/۸	۴۱۰۶۳	۴۱۸۳۹	فرکانس طبیعی اول (rad/sec)
۳/۷	۱۳۵۰۶۰	۱۴۹۲۷۰	فرکانس طبیعی دوم (rad/sec)
۳/۹	۲۴۷۸۳۰	۲۵۸۰۹۰	فرکانس طبیعی سوم (rad/sec)
۳/۵	۳۶۵۸۳۰	۳۷۹۳۴۰	فرکانس طبیعی چهارم (rad/sec)
۳	۴۸۴۷۰۰	۴۹۹۸۵۰	فرکانس طبیعی پنجم (rad/sec)

نتایج بدست عمده از این مقاله به شرح زیر می‌باشند:

۱- مطابق جدول (۲) و (۳)، در شرایط یکسان برای تیرهای با طول کوتاه ( $L=80\text{ mm}$ )، بستر تأثیر بسیار ناچیزی در تغییر فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو دارد. این در حالی است که در تیر تیموشنکو با طول زیاد ( $L=8000\text{ mm}$ )، بستر اثر زیادی در تغییر فرکانس طبیعی دارد که به‌صورت افزایش فرکانس طبیعی نمایان می‌شود. در توجیه نتایج فوق می‌توان به تناسب بین سختی تیر با معکوس توان سوم طول تیر اشاره کرد که با توجه به اینکه سختی کل برابر مجموع سختی ناشی از اثر بستر و سختی تیر است در طول‌های کوتاه اثر سختی تیر غالب بوده و در طول‌های بلند با توجه به ناچیز شدن مقدار  $1/L^3$  سختی بستر نقش غالب در سختی کل را دارد.

۲- مطابق جدول (۲) و (۳)، در طول‌های کوتاه، افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. مشاهده می‌شود در

$$(u_e)_{fond} = \frac{1}{2} \int_0^l K^* y^2 dx \quad (۳۷)$$

در رابطه بالا  $K^*$  ضریب سختی بستر است. بنابراین ماتریس سختی بستر به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$[k]_f = \int_0^l [N]^T K^* [N] dx \quad (۳۸)$$

$$[k]_f = \frac{K^* a}{(a^2 + 12g)^2} \begin{bmatrix} t_{11} & & & & & & & & \\ & t_{21} & t_{22} & & & & & & \\ & t_{31} & t_{32} & t_{33} & & & & & \\ & & & & t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

با توجه به اینکه ماتریس (۳۹) از نظر ابعادی با ماتریس سختی المان‌های تیر برابر است و با فرض اینکه تیر از روی بستر جدا نمی‌شود، به‌منظور احتساب اثر بستر، ماتریس معادله (۳۹) با ماتریس معادله (۲۶) جمع می‌شود.

### ۳-۵- ابعاد و خواص تیر مسئله

مطابق مرجع شماره [۱۸] تیر با مقطع مستطیل به طول  $L=80\text{ mm}$  و ضخامت  $W=20\text{ mm}$  و پهنا  $B=10\text{ mm}$  بوده و دارای مدول برشی  $G=27\text{ Gpa}$  و چگالی جرمی  $\rho=2800\text{ Kg/m}^3$  و ضریب برشی  $k=5/6$  است. در محاسبات مربوط به تیر ترک‌دار، نسبت طول ترک به عمق تیر را برابر  $\mu=0.2$  در نظر می‌گیریم. سختی بستر در تمام محاسبات  $20000\text{ N/m}^2$  است.

### ۴- نتایج

تمام مطالب ارائه‌شده در این بخش، بر مبنای نتایج گرفته‌شده از کدهای Matlab است که برای این مقاله نوشته‌شده است و همگی با قوانین علم مکانیک و ارتعاشات قابل توجیه می‌باشند. به‌منظور مقایسه در اکثر قسمت‌ها از دو تیر با طول‌های  $L=80\text{ mm}$  و  $L=8000\text{ mm}$  استفاده‌شده است. در ابتدا به‌منظور تأیید صحت محاسبات و بررسی دقت روش اجزاء محدود، جواب‌های بدست عمده برای ارتعاشات تیر بدون ترک با جواب‌های ارائه‌شده از مرجع شماره [۱۸] که از حل دقیق استفاده



جدول (۴) بررسی اثر تغییرات سختی بستر بر فرکانس های طبیعی تیر بدون ترک تیموشنکو

سختی بستر (N/m)	فرکانس سوم (rad/sec)	فرکانس دوم (rad/sec)	فرکانس اول (rad/sec)
۱۰۰۰۰	۱۳۹/۶۷	۱۳۴/۸۵	۱۳۳/۷۱
۲۰۰۰۰	۱۹۳/۳	۱۸۹/۸۴	۱۸۹/۰۴
۳۰۰۰۰	۲۴۳/۹۹	۲۳۲/۱۶	۲۳۱/۵
۴۰۰۰۰	۲۷۰/۳۳	۲۶۷/۸۷	۲۶۷/۳
۵۰۰۰۰	۳۰۱/۵۶	۲۹۹/۳۵	۲۹۸/۸۴
۱۰۰۰۰۰	۴۲۴/۵۳	۴۲۲/۹۶	۴۲۲/۶

جدول (۵) تغییرات فرکانس های طبیعی تیر تیموشنکو ترک دار با تکیه گاه های ساده نسبت به تغییر نسبت ترک

نسبت طول ترک به عمق تیر	فرکانس سوم (rad/sec)	فرکانس دوم (rad/sec)	فرکانس اول (rad/sec)
۰	۲۵۸۰۹۰	۱۴۰۲۷۰	۴۱۴۸۳۹
۰/۲	۲۴۴۳۰۰	۱۳۹۹۵۰	۳۶۰۸۷
۰/۴	۲۳۸۸۵۰	۱۳۹۸۱۰	۳۳۲۴۸
۰/۶	۲۳۳۶۹۰	۱۳۹۶۵۰	۳۰۰۹۶
۰/۸	۲۲۷۶۴۰	۱۳۹۴۶۰	۲۵۵۷۹

۵- وجود ترک در یک تیر باعث افزایش انعطاف پذیری موضعی تیر در ناحیه ترک دار و بنابراین کاهش سختی تیر می شود. از طرف دیگر هرچه گشتاور اعمالی به تیر بیشتر باشد، دهانه ترک تمایل به باز شدن بیشتری داشته و این باز شدن بیشتر دهانه ترک به معنی افزایش بیشتر انعطاف پذیری موضعی و کاهش بیشتر سختی بوده که منجر به کاهش فرکانس می شود. با توجه به منحنی گشتاور تیر دوسرگیردار، در دونقطه گشتاور صفر و در سه نقطه منحنی دارای اکسترمم نسبی است. بنابراین مطابق شکل (۳) در دو نقطه فرکانس ماکسیمم و در سه نقطه مینیمم دارد.

این حالت، با افزایش ۱۰۰ برابری طول تیر، فرکانس های طبیعی پایین تیر به شدت کاهش می یابند.

جدول (۲) فرکانس های طبیعی ارتعاشات عرضی تیر بدون ترک تیموشنکو با تکیه گاه های ساده

	بدون بستر L=8000mm	با بستر L=8000mm	با بستر L=80mm
فرکانس اول (rad/sec)	۴/۵۱۴۸	۱۸۹/۰۴	۴۱۸۳۹
فرکانس دوم (rad/sec)	۱۸/۰۵۹	۱۸۹/۸۴	۱۴۰۲۷۰
فرکانس سوم (rad/sec)	۴۰/۶۳۱	۱۹۳/۳	۲۸۵۰۹۰
فرکانس چهارم (rad/sec)	۷۲/۲۲۹	۲۰۲/۳	۳۷۹۳۴۰
فرکانس پنجم (rad/sec)	۱۱۲/۸۵	۲۲۰/۱۱	۴۹۹۸۵۰

جدول (۳) فرکانس های طبیعی ارتعاشات عرضی تیر بدون ترک تیموشنکو با تکیه گاه های گیردار

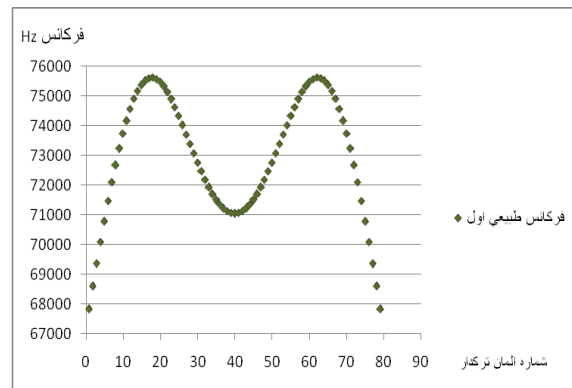
	بدون بستر L=8000mm	با بستر L=80mm	بدون بستر L=80mm
فرکانس اول (rad/sec)	۱۰/۲۳۴	۷۵۵۸۵	۷۵۵۸۵
فرکانس دوم (rad/sec)	۲۱/۲۸	۱۶۷۹۹۰	۱۶۷۹۹۰
فرکانس سوم (rad/sec)	۵۵/۲۹۹	۲۷۵۹۱۰	۲۷۵۹۱۰
فرکانس چهارم (rad/sec)	۹۱/۴۰۵	۳۸۹۸۷۰	۳۸۹۸۷۰
فرکانس پنجم (rad/sec)	۱۳۶/۵۳	۵۰۶۲۷۰	۵۰۶۲۷۰

۳- مطابق جدول (۴)، با افزایش سختی بستر، فرکانس های طبیعی تیر تیموشنکو افزایش می یابند.

۴- مطابق جدول (۵)، در تیر تیموشنکو ترک دار با تکیه گاه های ساده و بدون احتساب اثر بستر، در یک موقعیت ثابت ترک، افزایش نسبت طول ترک به عمق تیر باعث کاهش فرکانس های طبیعی تیر خواهد شد.

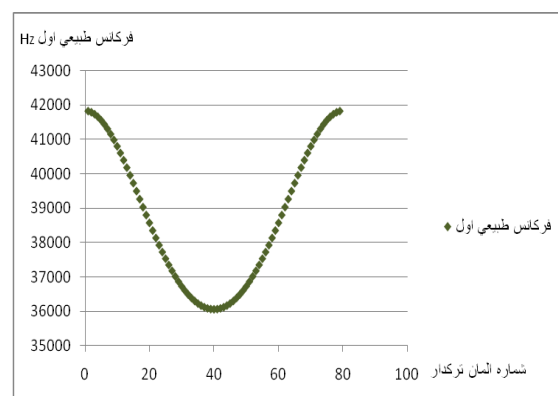
## مراجع

- [1] Gudmundsun, P., The Dynamic Behavior of Slender Structures with Cross-Sectional Cracks, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, No. 4, 1983, pp. 329-345.
- [2] Silva, J.M., Gomes, A.J., Experimental Dynamic Analysis of Cracked Free-free Beams, *Journal of Experimental Mechanics*, Vol. 30, No. 1, 1990, pp. 20-25.
- [3] Qian, G.L., Gu, S.N., Jiang, J.S., The Dynamic Behavior and Crack Detection of a Beam with a Crack, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 2, 1990, pp. 233-243.
- [4] Pandey A.K., Biswas M., Damage Detection in Structures Using Changes in Flexibility, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 1, 1994, pp. 3-17.
- [5] Narkis Y., Identification of Crack Location in Vibrating Simply supported Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 172, No. 4, 1994, pp. 549-558.
- [6] Lele S.P., Maiti S.K., Modeling of Transverse Vibration of Short Beams for Crack Detection and Measurement of Crack Extension, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 3, 2002, pp. 559-583.
- [7] Kim J.T., Stubbs N., Crack Detection in Beam-Type Structures Using Frequency Data, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 1, 2003, pp. 145-160.
- [8] Lin, H. P., "Direct and Inverse Methods on Free Vibration Analysis of Simply Supported Beams with a Crack", *Journal of Engineering Structures*, Vol. 26, 2004, pp. 427-436.
- [9] Swamidass A.S.J., Yang X.F., Seshadri R., Identification of Cracking in Beam Structures Using Timoshenko and Euler Formulations, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 130, No. 11, 2004, pp. 1297-1308.
- [10] Nahvi H., Jabbari M., Crack Detection in Beams Using Experimental Modal Data and Finite Element Method, *Journal of Mechanical Science*, Vol. 47, 2005, pp. 1477-1497.
- [11] Vakili-Baghmisheh M., Peimani M., Homayoun Sadeghi M., Etefagh M., Crack Detection in Beam Like Structures Using Genetic Algorithms, *Journal of Applied Soft Computing*, Vol. 8, 2008, pp. 1150-1160.
- [12] Ariaei A., Ziaei-Rad S., Ghayour M., Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masse, *journal of sound and vibration*, Vol. 326, 2009, pp. 709-724.
- [13] Dimarogonas A.D., Vibration of cracked structures-A state of the art review, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 55, 1996, pp.831-857.



شکل (۳) تغییرات فرکانس طبیعی اول تیر تیموشنکو دوسر گیردار ترک دار نسبت به تغییر موقعیت المان ترک دار

۶- وجود ترک در یک تیر باعث افزایش انعطاف پذیری موضعی تیر در ناحیه ترک دار و بنابراین کاهش سختی تیر می شود. از طرف دیگر هرچه گشتاور اعمالی به تیر بیشتر باشد، دهانه ترک تمایل به باز شدن بیشتری داشته و این باز شدن بیشتر دهانه ترک به معنی افزایش بیشتر انعطاف پذیری موضعی و کاهش بیشتر سختی بوده که منجر به کاهش فرکانس می شود. با توجه به منحنی گشتاور تیر دوسر لولا، بیشترین گشتاور در وسط تیر و کمترین آن در گوشه ها است. بنابراین مطابق شکل (۴) کمترین مقدار فرکانس در وسط و بیشترین آن در گوشه ها است.



شکل (۴) تغییرات فرکانس طبیعی اول تیر تیموشنکو دوسر لولای ترک دار نسبت به تغییر موقعیت المان ترک دار

[14] Hetenyi M., Beams on elastic foundation. The university of Michigan press, *Ann Arbor, U.S.A*, 1946.

[15] Chen Y., Huang Y., Shin E., Response of an in finite Timoshenko beam on a viscoelastic foundation to a harmonic moving loads, *Journal of sound and vibration*, Vol. 241, 2001, pp. 809-842.

[۱۶] چهارمحالی پور، ا.، نحوی، ح.، بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای دارای ترک، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد خمینی شهر، ۱۳۸۷.