

بررسی کمانش صفحات دایره‌ای و حلقوی ارتوتروپیک با ضخامت متغیر به روش ریلی - ریتز بهینه شده

آرش گل شاه^۲

فاطمه فرहत نیا^{۱*}

* نویسنده مسئول: farhatnia@iaukhsh.ac.ir

چکیده

در تحقیق حاضر کمانش متقارن صفحات دایره‌ای و حلقوی ارتوتروپ با ضخامت متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. ضخامت این صفحات در راستای شعاعی به طور خطی تغییر می‌کند و بارگذاری به روی آنها به صورت فشاری یکنواخت در لبه خارجی است. مرز خارجی صفحات دارای تکیه‌گاه‌های گیردار، ساده و الاستیک مقاوم در برابر چرخش بوده و لبه داخلی به صورت آزاد می‌باشد. در تحلیل کمانش این صفحات، روش ریلی - ریتز بهینه شده به کار گرفته شده است. در این روش از توابع چند جمله‌ای که بر اساس تغییر شکل استاتیکی صفحات دایره‌ای ارتوتروپ در خمش می‌باشند و ارضاء کننده شرایط مرزی هستند، استفاده شده است. در روش فوق از یک پارامتر نمایی در تابع تغییر مکان استفاده می‌شود و مقادیر ویژه به دست آمده از تحلیل، نسبت به این پارامتر حداقل است. مزیت این روش علاوه بر سادگی نسبی آن نسبت به سایر روشها، این است که کل الگوریتم حل مسئله قابل برنامه نویسی می‌باشد. در این تحقیق اثر تغییرات شعاع، ضخامت، نوع تکیه‌گاه، نسبت مدول یانگ در دو جهت شعاعی و محیطی و نسبت شعاع خارجی به داخلی در صفحات حلقوی بر روی ثابت کمانش (بار بحرانی کمانش بی بعد شده) بررسی شده است. نتایج بدست آمده مؤید آن است که در صفحات با ضخامت یکسان، افزایش میزان شعاع خارجی، موجب کاهش بار بحرانی کمانش می‌شود. همچنین با افزایش ضخامت در صفحات تحت شعاع ثابت، بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: کمانش، روش ریلی - ریتز بهینه شده، ضخامت متغیر، صفحه ارتوتروپیک

۱ - استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲ - دانشجو کارشناسی ارشد مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۱- مقدمه

صفحات دایره‌ای و حلقوی ارتوتروپ همواره مورد توجه طراحان سیستم‌های مکانیکی، سازه‌ای، عمران، دریا و هوافضا بوده‌اند که از جمله کاربردهای این صفحات می‌توان به دریچه‌های مخازن تحت فشار، صفحات دایره‌ای تقویت شده توسط تقویت کننده‌های شعاعی و محیطی، صفحات ساخته شده از مواد کامپوزیتی، سرپوش سیلندرها، صفحات نگه دارنده در بدنه زیر دریاییها، صفحات جدا کننده در هواپیماها، لنزهای نوری، ترانسیدوسرهای آکوستیکی و بعضی اجزای مورد استفاده در موشکها اشاره کرد.

مسئله پایداری الاستیک صفحات دایره‌ای ارتوتروپیک برای اولین بار توسط وینوسکی مورد مطالعه قرار گرفت. وی با استفاده از توابع بسط نتایج عددی برای کماتش این صفحات ارائه نمود [۱]. منک و همکارانش تاثیر تغییر ضخامت را بر روی کماتش یک صفحه ارتوتروپ مستطیل شکل بررسی کردند [۲]. لارا و همکارانش بار بحرانی کماتش را برای یک صفحه حلقوی ایزوتروپیک با ضخامت ثابت به روش ریلی- ریتز بهینه شده به دست آوردند، صفحه مورد بررسی هم در لبه خارجی و هم در لبه داخلی خود تحت تکیه گاههای مختلف قرار داشت [۳]. کیانکو کماتش یک ورق دایره‌ای و حلقوی ایزوتروپیک با ضخامت متغیر را که بخشی از بدنه یک زیر دریایی بود، مورد تحلیل قرار داد. این ورق در لبه داخلی آزاد فرض شده و در لبه خارجی به صورت گیردار و مقاوم در برابر چرخش بود. بار هیدرواستاتیک به طور هم راستا با محور بر آن اثر می‌کرد. ضخامت ورق تابع نمایی از شعاع آن بود. وی این ورق را با روش ریلی- ریتز بهینه شده مورد تحلیل قرار داد [۴].

برمس و کاسل نیز یک نرخ تغییر ضخامت بهینه برای کماتش یک ورق ایزوتروپ ارائه کردند. ورق مورد بررسی آنها در لبه داخلی و خارجی تحت بار یکنواخت هم راستا با محور قرار گرفته و تغییر ضخامت نیز تابعی از شعاع بود. معادلات کماتش آنها از نوع خطی بوده و با یک روش عددی برای حالتی که لبه‌های داخلی و خارجی می‌توانند گیردار یا

ساده باشند، حل شد [۵]. گوتیرز و دیگر همکارانش کماتش و ارتعاشات یک صفحه ایزوتروپ با ضخامت متغیر را بر روی تکیه‌گاه الاستیک با استفاده از روش ریلی- ریتز مورد بررسی قرار دادند و نتایج قابل قبولی به دست آوردند [۶]. بین لیانگ و همکارانش با استفاده از روش ریلی- ریتز فرکانسهای طبیعی یک صفحه دایره‌ای و حلقوی ارتوتروپیک با ضخامت متغیر را به دست آوردند و با روش المان محدود مورد مقایسه قرار دادند که تطابق خوبی بین دو روش مشاهده گردید [۷].

در تحقیق حاضر کماتش صفحات دایره‌ای و حلقوی ارتوتروپ با ضخامت متغیر خطی تحت اثر فشار یکنواخت بررسی می‌شود. صفحات حلقوی شامل صفحات F-C (لبه داخلی آزاد و لبه خارجی گیردار) یا صفحات حلقوی گیردار، صفحات F-S (لبه داخلی آزاد و لبه خارجی تکیه گاه ساده) یا صفحات حلقوی با تکیه گاه ساده و صفحات حلقوی با تکیه گاه داخلی آزاد و تکیه گاه خارجی مقاوم الاستیک در برابر چرخش می‌باشند. صفحات دایره‌ای شامل صفحات با شرایط مرزی گیردار، ساده و مقاوم الاستیک در برابر چرخش می‌باشند. با توجه به معادله دیفرانسیل کماتش یک صفحه دایره‌ای یا حلقوی ارتوتروپ با ضخامت متغیر، عملاً حل این معادله به صورت تحلیلی و دقیق غیر ممکن است و به ناچار باید از یکی از روشهای عددی یا انرژی برای حل این مسئله کماتش استفاده کرد. در تحقیق حاضر برای تحلیل کماتش صفحات از روش ریلی- ریتز بهینه شده استفاده شده است. نتایج این روش نسبت به روش ریلی- ریتز از دقت بالاتری برخوردار است. برای بهینه کردن روش ریلی- ریتز، از یک پارامتر نمایی در تابع تقریبی در نظر گرفته شده، استفاده می‌شود. مقادیر ویژه به دست آمده (ثابت کماتش) نسبت به این پارامتر نمایی حداقل می‌شود. سپس مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از این روش با نتایجی که از حل المان محدود که به کمک نرم افزار ANSYS به دست آمده، صورت می‌گیرد.

در این تحلیل اثر تغییرات ضخامت، شرایط مرزی، نسبت مدول یانگ در دو جهت شعاعی و محیطی، تغییر نسبت شعاع داخلی به خارجی بر روی ثابت کماتش بررسی شده است.

$D_\theta(r), D_r(r)$ صلیبتهای خمشی در جهت r, θ و به β

پارامتر ارتوتروپیک است.

کار انجام شده توسط نیروهای مستقیم N_θ, N_r در دستگاه استوانه‌ای برابر است با [۱۰]:

$$T = \frac{1}{\nu} \iint_A \left[N_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + N_\theta \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (6)$$

در تحقیق حاضر به دلیل آنکه صفحه تنها تحت بار شعاعی قرار دارد، می‌توان نوشت:

$$T = \pi \int_b^a N_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr \quad (7)$$

۳- روش ریلی - ریتز بهینه شده

روش ریلی - ریتز یک روش حد بالاست و مقادیر ویژه به دست آمده توسط این روش از مقدار واقعی بیشتر است. بنابراین اگر بتوان این مقدار ویژه را بهینه کرد، به طوری که به مقدار واقعی نزدیک تر شود، نتایج به دست آمده از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود. به طور کلی اگر تابع معرف کمیت مجهول در روش ریلی - ریتز به صورت ترکیب خطی از توابع شکل $\varphi_n(x)$ به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(x) \quad (8)$$

که در آن ضرایب نامعین هستند. می‌توان با استفاده از ایده بهینه سازی این تابع را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(x, k) \quad (9)$$

که در آن k پارامتر نمایی بهینه سازی است.

با حداقل کردن تابع انرژی پتانسیل J در روش ریلی - ریتز، دستگاهی از معادلات بر حسب ضرایب ثابت C_n به دست می‌آید که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه معادله‌ای تشکیل می‌شود که با حل آن مقادیر ویژه λ_i بر حسب k به دست می‌آید.

$$\lambda_i = \lambda_i(k) \quad (10)$$

با حداقل کردن λ_i نسبت به k یعنی $\frac{\partial \lambda_i}{\partial k} = 0$ می‌توان مقدار ویژه بهینه شده را به دست آورد.

۲- انرژی کرنشی صفحه

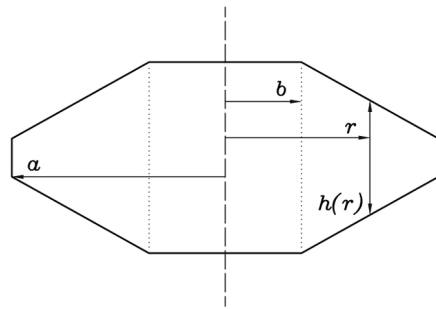
انرژی کرنشی ذخیره شده در یک جسم الاستیک برای حالت کلی تنش در دستگاههای مختصات دکارتی با عبارت زیر داده می‌شود [۸]:

$$U = \frac{1}{\nu} \iiint_v (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) \quad (1)$$

با استفاده از روابط تنش - کرنش و کرنش - تغییر مکان در مواد ارتوتروپ و جایگذاری تنش بر حسب کرنش، و با توجه به برقراری رابطه $E_r \nu_\theta = E_\theta \nu_r$ در مواد ارتوتروپ خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{\nu} \iiint_v \frac{z^2}{1 - \nu_r \nu_\theta} \left[E_r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2 E_r \nu_\theta \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) \left(\frac{dw}{dr} \right) + E_\theta \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] r dr d\theta dz \quad (2)$$

صفحه شکل (۱) دارای ضخامت متغیر $h(r)$ و شعاع داخلی و خارجی به ترتیب a, b باشد. با انتگرال گیری در امتداد ضخامت خواهیم داشت:



شکل (۱) تصویر صفحه حلقوی با تغییر ضخامت نسبت به شعاع

$$U = \pi \int_a^b D_r(r) \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2 \nu_\theta \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) \left(\frac{dw}{r dr} \right) + \beta^2 \left(\frac{dw}{r dr} \right)^2 \right] r dr \quad (3)$$

که:

$$D_r(r) = \frac{E_r h(r)^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} \quad (4)$$

$$D_\theta(r) = \frac{E_\theta h(r)^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}$$

همچنین:

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{D_\theta(r)}{D_r(r)} = \beta^2 \quad (5)$$

برای سهولت انجام کار برای رابطه $J(w)$ از تبدیلات بی بعد ساز استفاده می‌شود. در نتیجه:

$$\frac{a^2}{\pi D_0} J(w) = \int_{r_b}^1 \left\{ g(R) \left[\left(\frac{d^2 w}{dR^2} \right)^2 + 2\nu\theta \left(\frac{d^2 w}{dR^2} \right) \left(\frac{dw}{RdR} \right) + \beta^2 \left(\frac{dw}{RdR} \right)^2 \right] - \frac{\lambda}{1-r_b^2\beta} \left[R^{\beta-1} - \frac{r_b^2\beta}{R^{\beta+1}} \right] \left(\frac{dw}{dR} \right)^2 \right\} RdR \quad (18)$$

در معادله بالا، λ پارامتر بی بعد کماتش (ثابت کماتش) برابر است با:

$$\lambda = \frac{N_0 a^2}{D_0} \quad (19)$$

$$g(R) = (1 + \gamma R)^2 \quad (20)$$

با در نظر گرفتن $w(R)$ بر حسب مجموعی از توابع چند جمله‌ای داریم:

$$w(R) = \sum_{i=1}^m c_i w_i(R) \quad (21)$$

$w_i(R)$ با توجه به تغییر مکان استاتیکی صفحات دایره‌ای شکل ارتوتروپ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۷]:

$$w_i(R) = (a_i R^k + b_i R^{1+\beta} + 1) R^{i-1} \quad (22)$$

در رابطه فوق پارامتر نمایی k پارامتر بهینه سازی است. ضرایب ثابت b_i, a_i نیز با اعمال شرایط مرزی صفحه در توابع $w_i(R)$ بدست می‌آید.

شرایط مرزی حاکم بر یک صفحه حلقوی ارتوتروپ گیردار در لبه خارجی خود ($R=1$) عبارتست از:

$$\begin{cases} w_i(1) = 0 \\ \frac{dw_i}{dR}(1) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

با قرار دادن رابطه (۲۳) در رابطه (۲۴) خواهیم داشت:

$$a_i = \frac{-1-\beta}{1+\beta-k} \quad (24)$$

$$b_i = \frac{k}{1+\beta-k}$$

همچنین شرایط مرزی حاکم بر یک صفحه حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه ساده در لبه خارجی خود عبارت است از:

$$\begin{cases} w_i(1) = 0 \\ \frac{d^2 w_i}{dR^2}(1) + \nu\theta \frac{dw_i}{dR}(1) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

۴- بررسی هندسه مسئله

ابتدا صفحات حلقوی و دایره‌ای با ضخامت متغیر خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شعاع داخلی صفحات (b) و شعاع خارجی صفحات (a) است. تغییرات ضخامت $h(r)$ صفحه با استفاده از رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$h(r) = h_0 \left(1 + \gamma \left(\frac{r}{a} \right)^n \right) \quad (11)$$

که در رابطه فوق h_0 ضخامت در مرکز صفحه، n نشان دهنده نوع تغییرات ضخامت، اعم از ثابت ($n=0$) و متغیر خطی ($n=1$)، می‌باشد که کمیتی مثبت است و γ نیز پارامتری بی بعد می‌باشد که دارای هر دو علامت مثبت و منفی است این پارامترها در صفحات حلقوی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_0 = \frac{h_b}{1 + \gamma \left(\frac{b}{a} \right)^n} = \frac{h_b}{1 + \gamma (r_b)^n} \quad (12)$$

همچنین این پارامترها در صفحات دایره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma = \frac{h_a}{h_0} - 1 \quad (13)$$

۵- کماتش صفحات حلقوی

تحلیل کماتش صفحات حلقوی با استفاده از روش ریلی- ریتز مستلزم حداقل شدن انرژی پتانسیل $J(w)$ است. این انرژی برابر است با:

$$J(w) = U - T \quad (14)$$

در صفحات با تکیه گاه گیردار و ساده به صورت زیر است:

$$U = \pi \int_b^a \left[D_r(r) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + 2\nu\theta D_r(r) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) \left(\frac{dw}{rdr} \right) + D_\theta(r) \left(\frac{dw}{rdr} \right)^2 \right] r dr \quad (15)$$

همچنین کار انجام شده توسط نیروی شعاعی N_r برابر است با:

$$T = \pi \int_b^a N_r(r) \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 r dr \quad (16)$$

کار انجام شده $N_r(r)$ برای یک صفحه حلقوی ارتوتروپ با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۹]:

$$N_r(r) = \frac{-N \cdot a^{\beta+1}}{a^2\beta - b^2\beta} \left[r^{\beta-1} - \frac{b^2\beta}{r^{\beta+1}} \right] \quad (17)$$

برای صفحه حلقوی با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش به a_{ij} یک ترم اضافه شده و به صورت زیر نوشته می شود:

$$a_{ij} = \int_{r_b}^1 g(R) \left[\left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{d^2 w_j}{dR^2} \right) + \nu \theta \left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) + \beta^2 \left(\frac{dw_i}{RdR} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) \right] RdR + \varphi \left(\frac{dw_i}{dR} \right) \left(\frac{dw_j}{dR} \right) \quad (34)$$

۶- کمناش صفحات دایره‌ای

روابط مربوط به کمناش صفحات حلقوی با قرار دادن مقدار شعاع داخلی صفحات (b) برابر با صفر، قابل استفاده برای صفحات دایره‌ای است. البته با این تفاوت که تغییر مکان $w(R)$ صفحات دایره‌ای با صفحات حلقوی متفاوت است و به دنبال آن ضرایب b_i, a_i نیز متفاوت است.

در صفحات دایره‌ای با توجه به تغییر مکان استاتیکی صفحه تابع تغییر مکان $w(R)$ به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$w(R) = \sum_{i=1}^m c_i w_i(R) \quad (35)$$

که در آن:

$$w_i(R) = (a_i R^k + b_i R^{1+\beta} + 1) R^{\nu(i-1)} \quad (36)$$

ضرایب ثابت b_i, a_i نیز با اعمال شرایط مرزی صفحه در

توابع $w_i(R)$ به صورت زیر به دست می آید:

(۱) برای صفحه دایره‌ای با تکیه گاه گیردار:

$$a_i = \frac{-1-\beta}{1+\beta-k} \quad (37)$$

$$b_i = \frac{k}{1+\beta-k}$$

(۲) برای صفحه دایره‌ای با تکیه گاه ساده:

$$a_i = \frac{(1+\beta)(-\nu+\nu i+\beta+\nu\theta)}{(-1-\beta+k)(-\nu+\nu i+k+\beta+\nu\theta)} \quad (38)$$

$$b_i = -\frac{k(-\nu+\nu i+k+\nu\theta)}{(-1-\beta+k)(-\nu+\nu i+k+\beta+\nu\theta)}$$

(۳) برای صفحات دایره‌ای با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش:

$$a_i = -\frac{Q_i - L_i}{S_i - L_i} \quad , \quad b_i = -\frac{S_i - Q_i}{S_i - L_i} \quad (39)$$

که:

$$S_i = (k+\nu i-\nu) [1+g(R)K_\phi(-\nu+\nu i+k+\nu\theta)]$$

$$L_i = (\nu i+\beta-1) [1+g(R)K_\phi(-\nu+\nu i+\beta+\nu\theta)] \quad (40)$$

$$Q_i = \nu(i-1) [1+g(R)K_\phi(-\nu+\nu i+\nu\theta)]$$

اعمال شرایط فوق برای رابطه (۲۳) ضرایب ثابت b_i, a_i بدست می آید که عبارتند از:

$$a_i = \frac{(1+\beta)(-\nu+\nu i+\beta+\nu\theta)}{(-1-\beta+k)(-\nu+\nu i+k+\beta+\nu\theta)} \quad (26)$$

$$b_i = -\frac{k(-\nu+\nu i+k+\nu\theta)}{(-1-\beta+k)(-\nu+\nu i+k+\beta+\nu\theta)}$$

برای صفحه حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش شرایط مرزی زیر حاکم است:

$$\begin{cases} w_i(1) = 0 \\ \varphi \frac{dw_i}{dR}(1) = -g(R) \left[\frac{d^2 w_i}{dR^2}(1) + \nu \theta \frac{dw_i}{dR}(1) \right] \end{cases} \quad (27)$$

که در آن φ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varphi = \frac{ak\phi}{D_0} \quad (28)$$

که $k\phi$ سختی فنر پیچشی می باشد.

با قرار دادن رابطه (۲۳) در معادله (۲۸) خواهیم داشت:

$$a_i = -\frac{Q_i - L_i}{S_i - L_i} \quad , \quad b_i = -\frac{S_i - Q_i}{S_i - L_i} \quad (29)$$

که:

$$S_i = (k+i-1) [1+g(R)\varphi(-\nu+i+k+\nu\theta)]$$

$$L_i = (i+\beta) [1+g(R)\varphi(-1+i+\beta+\nu\theta)] \quad (30)$$

$$Q_i = (i-1) [1+g(R)\varphi(-\nu+i+\nu\theta)]$$

حداقل نمودن $J(w)$ مستلزم آن است که:

$$\frac{\partial J(w)}{\partial c_i} = 0 \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (31)$$

با جایگزین کردن روابط (۱۸) در رابطه (۳۱) دستگاهی از

معادلات تشکیل خواهد شد که برای داشتن جواب غیر صفر

باید دترمینان ماتریس ضرایب صفر گردد.

$$|A-\lambda B| = 0 \quad (32)$$

که در آن $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times m}$

$$a_{ij} = \int_{r_b}^1 g(R) \left[\left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{d^2 w_j}{dR^2} \right) + \nu \theta \left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) + \beta^2 \left(\frac{dw_i}{dR} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) \right] RdR \quad (33)$$

$$b_{ij} = \frac{\lambda}{1-r_b^{\nu\beta}} \left[R^{\beta-1} - \frac{r_b^{\nu\beta}}{R^{\beta+\nu}} \right] \int_{r_b}^1 \left(\frac{dw_i}{dR} \right) \left(\frac{dw_j}{dR} \right) RdR$$

ثابت کماتش برای مقادیر مختلف β^2, γ, r_b نشان داده شده است. همانطور که در این جدول مشاهده می‌شود با افزایش مقدار β مقدار ثابت کماتش λ افزایش می‌یابد. $\beta = 1$ وضعیتی است که در آن صفحه ایزوتروپیک است. همانطور که در جدول مشاهده می‌شود، به کارگیری یک صفحه ارتوتروپیک به جای صفحه ایزوتروپیک با مشخصات هندسی یکسان صفحه موجب افزایش بار کماتش می‌گردد. در واقع مقاومت آن در برابر کماتش افزایش می‌یابد. علاوه بر این با افزایش مقدار پارامتر γ از 0.3 تا 0.3 ثابت کماتش افزایش می‌یابد. همچنین در این جدول مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار r_b از 0.1 تا 0.5 مقدار λ کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

جدول (۱) ثابت کماتش صفحات حلقوی ارتوتروپ گیردار

با ضخامت متغیر

| β^2 | γ | r_b | | | | |
|-----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | ۰/۱ | ۰/۲ | ۰/۳ | ۰/۴ | ۰/۵ |
| ۱ | ۰/۳ | ۷/۶۵۹۶۵ | ۷/۰۸۴۴۳ | ۷/۱۵۶۲۱ | ۸/۱۷۴۰۷ | ۱۰/۶۰۶۹ |
| | ۰/۱ | ۱۱/۶۵۳۸ | ۱۱/۱۵۲۶ | ۱۱/۹۵۱۱ | ۱۴/۴۷۵۵ | ۱۹/۷۲۸۸ |
| | ۰ | ۱۴/۰۱۰۲ | ۱۳/۶۲۷۲ | ۱۴/۹۰۷۰ | ۱۸/۵۵۸۸ | ۲۵/۷۶۰۲ |
| | ۰/۱ | ۱۶/۶۰۵ | ۱۶/۳۱۶۹ | ۱۸/۴۴۴۴ | ۲۳/۳۳۵۸ | ۳۲/۸۹۱۴ |
| | ۰/۳ | ۲۳/۵۶۹۳ | ۲۳/۰۰۳۵ | ۲۶/۸۶۹۸ | ۳۵/۱۲۲۶ | ۵۰/۸۱۰۹ |
| ۲ | ۰/۳ | ۱۲/۹۹۷۷ | ۱۱/۷۹۸۹ | ۱۱/۳۱۳۱ | ۱۱/۶۱۶۵ | ۱۳/۴۴۱۶ |
| | ۰/۱ | ۱۹/۴۹۷۴ | ۱۸/۸۱۹۵ | ۱۸/۶۰۱۳ | ۲۰/۰۸۰۲ | ۲۴/۵۰۶۸ |
| | ۰ | ۲۳/۸۲۴۴ | ۲۳/۰۸۱۱ | ۲۳/۱۴۱۳ | ۲۵/۵۰۳۸ | ۳۱/۷۷۲۲ |
| | ۰/۱ | ۲۸/۶۶۵۷ | ۲۷/۸۷۸۹ | ۲۸/۳۳۳۳ | ۳۱/۸۰۷ | ۴۰/۳۳۳۹ |
| | ۰/۳ | ۳۹/۸۵۹۳ | ۳۹/۱۸۱۴ | ۴۰/۸۳۳۳ | ۴۷/۳۰۵۲ | ۶۱/۷۵۲۱ |
| ۵ | ۰/۳ | ۲۳/۳۳۱ | ۲۳/۲۳۵ | ۲۳/۷۹۷۴ | ۲۲/۱۴۱۶ | ۲۲/۴۰۷ |
| | ۰/۱ | ۳۹/۳۳۱۸ | ۳۹/۱۵۱ | ۳۸/۴۵۹ | ۳۸/۰۱۳۸ | ۳۹/۹۲۲۷ |
| | ۰ | ۴۹/۲۸۶۱ | ۴۹/۰۶۵۵ | ۴۸/۳۰۵۲ | ۴۸/۰۹۱۸ | ۵۱/۳۰۹ |
| | ۰/۱ | ۶۰/۶۴۳۵ | ۶۰/۳۶۴۸ | ۵۹/۳۶۴۸ | ۵۹/۷۵۰۲ | ۶۴/۶۴۸۱ |
| | ۰/۳ | ۸۷/۸۹۵۴ | ۸۷/۳۵۸۴ | ۸۶/۶۴۹۷ | ۸۸/۲۴۹۱ | ۹۷/۷۹۴۷ |
| ۱۰ | ۰/۳ | ۳۹/۴۰۵۱ | ۳۹/۲۵۹۵ | ۳۹/۲۵۹۵ | ۳۸/۲۴۵۲ | ۳۷/۹۰۵۳ |
| | ۰/۱ | ۶۹/۳۳۷۹ | ۶۹/۰۸۹۵ | ۶۹/۰۸۹۴ | ۶۸/۲۶۶۱ | ۶۷/۷۰۹۳ |
| | ۰ | ۸۸/۳۳۷۹ | ۸۸/۴۰۴ | ۸۸/۱۴۱۴ | ۸۷/۲۲۳۲ | ۸۷/۰۲۱۱ |
| | ۰/۱ | ۱۱۰/۶۱۵ | ۱۱۰/۵۶۸ | ۱۱۰/۲۲۱ | ۱۰۹/۲۰۳ | ۱۰۹/۶۱ |
| | ۰/۳ | ۱۶۴/۸۵۲ | ۱۶۴/۷۷۴ | ۱۶۴/۲۷۵ | ۱۶۳/۱۷۶ | ۱۶۵/۶۰۸ |

ب) صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه ساده

در جدول (۲) نتایج ثابت کماتش صفحات حلقوی ارتوتروپ ضخامت متغیر با تکیه گاه ساده نسبت به پارامترهای β^2, γ, r_b نشان داده شده است. همانطور که در این جدول مشاهده می‌شود در صفحات با تکیه گاه ساده همچون صفحات گیردار با افزایش مقدار β ، ثابت کماتش افزایش می‌یابد و در این نوع صفحات نیز می‌توان با استفاده از صفحات ارتوتروپیک به جای صفحات ایزوتروپیک، مقاومت صفحه را در برابر کماتش افزایش داد.

همچنین درایه‌های ماتریس A و B که در آن $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ عبارتند از:

$$a_{ij} = \int_0^1 g(R) \left[\left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{d^2 w_j}{dR^2} \right) + \nu \theta \left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) + \beta^2 \left(\frac{dw_i}{RdR} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) \right] RdR \quad (۴۱)$$

برای صفحه دایره‌ای با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش a_{ij} به صورت زیر بیان می‌شود:

$$a_{ij} = \int_0^1 g(R) \left[\left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{d^2 w_j}{dR^2} \right) + \nu \theta \left(\frac{d^2 w_i}{dR^2} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) + \beta^2 \left(\frac{dw_i}{RdR} \right) \left(\frac{dw_j}{RdR} \right) \right] RdR + \phi \left(\frac{dw_i(1)}{RdR} \right) \left(\frac{dw_j(1)}{RdR} \right) \quad (۴۲)$$

از صفر قرار دادن دترمینان فوق، رابطه‌ای بر حسب k, λ به دست می‌آید که با استفاده از آن می‌توان λ را بر حسب k محاسبه نمود. با حداقل نمودن λ نسبت به k ، بار بحرانی کماتش تعیین می‌گردد.

۷- نتایج عددی

در تحقیق حاضر، به منظور به دست آوردن ضریب نیروی کماتشی یک برنامه کامپیوتری در نرم افزار و MATHEMATICA به نحوی که تأثیر پارامترهایی مانند تغییرات شعاع، ضخامت، نوع تکیه گاه، نسبت مدول یانگ در دو جهت شعاعی و محیطی و در آن لحاظ شده باشد، نوشته شده است. در تحلیلهای انجام شده تعداد جملات در نظر گرفته شده برای تابع تغییر مکان چهار جمله ($m=4$) است. در این تحلیلهها مقدار ν_θ برابر 0.3 در نظر گرفته شده است. در تحلیلهای انجام شده ثابت کماتش λ مد نظر بوده که اثر پارامترهای مختلف بر روی آن بررسی شده است و مقدار آن در حالات مختلف به دست آمده است.

الف) صفحات حلقوی ارتوتروپ گیردار

جدول (۱) نتایج ثابت کماتش λ برای صفحات حلقوی ارتوتروپ گیردار با ضخامت متغیر نشان داده شده است. لبه داخلی این صفحات آزاد و لبه خارجی آنها گیردار و در لبه خارجی تحت فشار یکنواخت قرار دارند در این جدول مقدار

آن، λ بیشتر شد. در این حالت نیز با افزایش β ، λ افزایش می‌یابد.

جدول (۳) ثابت کماتش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم در برابر چرخش و با ضخامت متغیر خطی ($\beta = 1$)

| γ | φ | r_b | | | | |
|----------|-----------|---------|---------|---------|---------|----------|
| | | ۰/۱ | ۰/۲ | ۰/۳ | ۰/۴ | ۰/۵ |
| -۰/۳ | ۰ | ۲/۳۸۸۶۴ | ۲/۸۲۴۲ | ۱/۳۴۲۹۱ | ۱/۴۵۱۹۲ | ۱/۳۲۱۵۲ |
| | ۱۰ | ۷/۰۲۰۷۳ | ۶/۴۷۱۸۸ | ۶/۴۳۲۸ | ۷/۱۴۸۹۹ | ۸/۹۲۷۷۳ |
| | ∞ | ۷/۷۸۶۸۵ | ۷/۱۷۲۵۲ | ۷/۲۰۸۷۶ | ۸/۲۱۳۸۱ | ۱۰/۶۲۸۳ |
| -۰/۱ | ۰ | ۳/۴۱۸۵ | ۳/۰۰۹۷۶ | ۲/۵۵۵۹۸ | ۲/۳۶۱۷۱ | ۲/۰۰۳۵۷ |
| | ۱۰ | ۱۰/۱۶۴۹ | ۹/۶۲۱۰۹ | ۹/۹۲۸۵۷ | ۱۱/۳۶۸ | ۱۶/۴۶۷۲ |
| | ∞ | ۱۱/۷۹۲۸ | ۱۱/۲۹۴۵ | ۱۲/۰۲۴۶ | ۱۴/۵۱۳۹ | ۱۹/۵۲۴۴ |
| ۰ | ۰ | ۴/۰۱۴۴ | ۳/۵۵۶۷۴ | ۳/۱۱۲۸۴ | ۲/۷۵۵۲۲ | ۲/۵۰۰۹۷ |
| | ۱۰ | ۱۱/۷۵۲۸ | ۱۱/۲۷۴۴ | ۱۱/۸۰۷۴ | ۱۳/۶۶۴۴ | ۱۷/۲۳۷۳ |
| | ∞ | ۱۴/۱۳۰۹ | ۱۳/۷۵۲۳ | ۱۵/۰۲۶۱ | ۱۸/۵۹۲۲ | ۲۵/۷۲۴۴ |
| ۰/۱ | ۰ | ۶/۶۶۹۵۲ | ۴/۱۶۶۱۴ | ۳/۶۹۵ | ۳/۳۴۰۹ | ۳/۰۷۷۳۹ |
| | ۱۰ | ۱۳/۳۷۴۴ | ۱۲/۹۶۶۳ | ۱۲/۷۷۳ | ۱۵/۹۷۴۲ | ۲۰/۱۷۳۶ |
| | ∞ | ۱۶/۷۰۸۲ | ۱۶/۵۲۸۴ | ۱۸/۵۰۱۸ | ۲۳/۳۵۷ | ۳۲/۱۸۱۶ |
| -۰/۳ | ۰ | ۶/۱۷۱۲۵ | ۵/۵۸۸۱ | ۵/۰۹۳۲ | ۶/۷۳۹۱۸ | ۶/۲۹۱۴۸ |
| | ۱۰ | ۱۶/۶۴۴۴ | ۱۶/۴۱۴۶ | ۱۷/۶۳۷۷ | ۲۰/۵۲۲۱ | ۲۵/۵۵۵۶ |
| | ∞ | ۲۳/۶ | ۲۳/۰۸۰۱ | ۲۶/۹۰۹۷ | ۳۵/۱۴۸۸ | ۵۰/۸۰۴۰۴ |

همچنین با بررسی اثر پارامتر φ در این جداول مشاهده می‌شود که در حالتی که φ به سمت صفر میل می‌کند، صفحه رفتار یک صفحه با تکیه گاه ساده را از خود نشان می‌دهد و می‌توان آن را حالت تکیه گاه ساده در نظر گرفت. همچنین در حالتی که φ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، صفحه رفتار یک صفحه گیردار را از خود نشان می‌دهد. همانطور که در این جداول ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار φ ، λ افزایش یافته است. همچنین در این جدول اثر پارامتر r_b بر روی λ نشان داده شده است. در حالت $\varphi = 0$ با افزایش r_b مقدار λ کاهش و در حالتی که $\varphi = 0$ باشد. با افزایش r_b ابتدا λ کاهش (تقریباً تا $r_b = 0.3$) و سپس افزایش پیدا می‌کند.

جدول (۴) ثابت کماتش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم در برابر چرخش و با ضخامت متغیر خطی ($\beta = \sqrt{3}$)

| γ | φ | r_b | | | | |
|----------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | ۰/۱ | ۰/۲ | ۰/۳ | ۰/۴ | ۰/۵ |
| -۰/۳ | ۰ | ۳/۸۶۴۹۴ | ۳/۷۰۷۷۸ | ۳/۳۷۹۴۸ | ۲/۹۵۹۰۴ | ۲/۵۴۶۱۴ |
| | ۱۰ | ۱۱/۱۴۹۴ | ۱۰/۷۴۶۶ | ۱۰/۲۳۵۵ | ۱۰/۲۹۲۱ | ۱۱/۴۹۰۷ |
| | ∞ | ۱۲/۳۹۶۱ | ۱۱/۹۷۱۲ | ۱۱/۴۲۹ | ۱۱/۷۰۲۲ | ۱۳/۴۸۸۷ |
| -۰/۱ | ۰ | ۵/۹۲۰۷۸ | ۵/۶۸۸۱۶ | ۵/۳۳۸۰۸ | ۴/۷۱۰۴۵ | ۴/۲۱۹۵۲ |
| | ۱۰ | ۱۶/۳۹۲۵ | ۱۵/۹۴۰۶ | ۱۵/۵۲۱۴ | ۱۶/۰۸۳۱ | ۱۸/۳۶۷۹ |
| | ∞ | ۱۹/۶۰۰۷ | ۱۹/۰۲۳۵ | ۱۸/۷۶۰۹ | ۲۰/۱۰۶۸ | ۲۴/۵۵۵۸ |
| ۰ | ۰ | ۷/۱۶۴۴۹ | ۶/۸۸۷۹۱ | ۶/۳۷۸۳۱ | ۵/۸۰۵۳۷ | ۵/۲۸۶۱۳ |
| | ۱۰ | ۱۹/۱۷۳ | ۱۸/۶۷۶۸ | ۱۸/۳۵۹۷ | ۱۹/۲۰۰۴ | ۲۲/۰۱۳۲ |
| | ∞ | ۲۳/۹۳۳۱ | ۲۳/۲۷۹۷ | ۲۳/۹۱۷ | ۲۵/۵۸۸۱ | ۳۱/۸۲۴۴ |
| ۰/۱ | ۰ | ۸/۵۵۷۷۲ | ۸/۲۳۹۵۸ | ۷/۶۷۴۰۹ | ۷/۰۶۲۲۱ | ۶/۵۲۳۵۳ |
| | ۱۰ | ۲۲/۰۲۱۶ | ۲۱/۱۹۰۳ | ۲۱/۲۷۷۵ | ۲۲/۴۰۷۶ | ۲۵/۶۷۹ |
| | ∞ | ۲۸/۶۷۲ | ۲۸/۰۶۲ | ۲۸/۴۷۳۶ | ۳۱/۸۸۷۶ | ۴۰/۳۸۸ |
| -۰/۳ | ۰ | ۱۱/۲۴۴۶ | ۱۱/۴۴۲۴ | ۱۰/۷۷۲۴ | ۱۰/۱۰۰۸ | ۹/۵۶۳۱۳ |
| | ۱۰ | ۲۷/۸۳۰۵ | ۲۷/۲۷۱۱ | ۲۷/۲۷۸۹ | ۲۸/۸۹۸۲ | ۳۲/۸۹۷ |
| | ∞ | ۴۰/۰۱۹۳ | ۳۹/۳۲۰۳ | ۴۰/۹۴۵۴ | ۴۷/۳۷۵۹ | ۶۱/۸۰۹۲ |

جدول (۲) ثابت کماتش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه ساده و

ضخامت متغیر

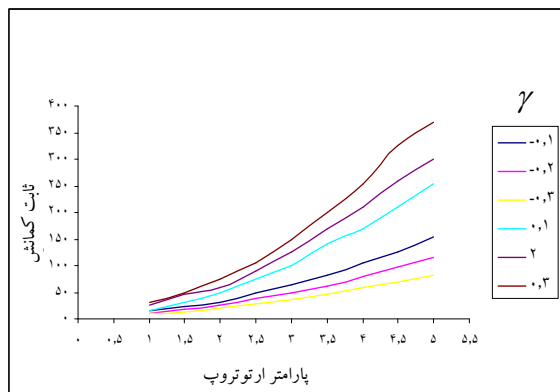
| β | γ | r_b | | | | |
|---------|----------|---------|---------|---------|---------|----------|
| | | ۰/۱ | ۰/۲ | ۰/۳ | ۰/۴ | ۰/۵ |
| ۱ | -۰/۳ | ۲/۳۸۸۶۴ | ۲/۸۲۴۲ | ۱/۳۴۲۹۱ | ۱/۴۵۱۹۲ | ۱/۳۲۱۵۲ |
| | -۰/۱ | ۳/۴۰۴۱۳ | ۲/۹۹۷۲۴ | ۲/۵۹۰۶۷ | ۲/۵۹۹۶۶ | ۲/۰۰۳۰۷ |
| | ۰ | ۳/۹۴۴۱۸ | ۳/۵۳۹۹۵ | ۳/۱۰۶۶۶ | ۲/۹۶۲۴۴ | ۲/۵۰۰۲۳ |
| | ۰/۱ | ۴/۶۴۴۲۶ | ۴/۱۴۵۳۶ | ۳/۶۹۰۷۷ | ۳/۳۳۸۵۵ | ۳/۰۰۷۶۳۸ |
| | ۰/۳ | ۶/۱۳۹۳۴ | ۵/۵۶۱۳۵ | ۵/۸۰۴۶ | ۴/۳۴۳ | ۴/۴۸۹۸۲ |
| ۲ | -۰/۳ | ۳/۸۶۵ | ۳/۷۰۶۸۶ | ۲/۳۷۷۷۹ | ۲/۹۵۸۰۳ | ۲/۵۴۵۷۸ |
| | -۰/۱ | ۵/۹۱۴۵۹ | ۵/۴۷۵۲۷ | ۵/۲۲۸۲ | ۴/۷۰۵۷۴ | ۴/۲۱۷۸۵ |
| | ۰ | ۷/۱۴۸۹۲ | ۶/۸۶۶۳۴ | ۶/۳۴۳۳۸ | ۵/۹۸۸۲۸ | ۵/۲۸۳۵۵ |
| | ۰/۱ | ۸/۵۳۶۸ | ۸/۲۰۸۷۳ | ۷/۶۵۲۱۶ | ۷/۰۵۲۴۵ | ۶/۵۱۹۹۱ |
| | ۰/۳ | ۱۱/۸۰۴۳ | ۱۱/۳۸۷۳ | ۱۰/۸۳۹۸ | ۱۰/۰۳۲۲ | ۹/۵۵۰۶ |
| ۵ | -۰/۳ | ۷/۴۹۵۳ | ۷/۴۲۶۳ | ۷/۹۹۹۷ | ۶/۹۵۲۲۱ | ۶/۳۵۱۶۹ |
| | -۰/۱ | ۱۲/۴۰۳۹ | ۱۲/۳۶۲۸ | ۱۲/۱۵۷۱ | ۱۱/۶۴۱۵ | ۱۰/۸۲۵۱ |
| | ۰ | ۱۵/۱۸۱۶ | ۱۵/۴۶۷ | ۱۵/۲۱۶۹ | ۱۴/۶۲۴۴ | ۱۳/۶۹۵۳ |
| | ۰/۱ | ۱۹/۱۰۲۴ | ۱۹/۰۳۹۲ | ۱۸/۲۲۱۱ | ۱۸/۰۵۱۹ | ۱۷/۰۳۷۱ |
| | ۰/۳ | ۲۷/۸۰۸۸ | ۲۷/۷۱۹۲ | ۲۷/۳۲۲۵ | ۲۶/۳۴۶۱ | ۲۵/۳۸۲۲ |
| ۱۰ | -۰/۳ | ۱۲/۶۶۱۳ | ۱۲/۵۹۲ | ۱۲/۳۳۲ | ۱۲/۵۹۰۴ | ۱۲/۲۲۹۹ |
| | -۰/۱ | ۲۲/۴۳۴ | ۲۲/۴۲۹۹ | ۲۲/۳۸۲۶ | ۲۲/۳۴۰۱ | ۲۱/۴۲۳۷ |
| | ۰ | ۲۸/۶۸۰۲ | ۲۸/۶۷۳۹ | ۲۸/۶۱۳۴ | ۲۸/۳۱۹۹ | ۲۷/۴۵۵۸ |
| | ۰/۱ | ۳۵/۶۶۷۹ | ۳۵/۹۶۲۱ | ۳۵/۸۸۹ | ۳۵/۵۲۲ | ۳۴/۵۲۱۳ |
| | ۰/۳ | ۵۴/۰۰۸ | ۵۴/۰۰۲۱ | ۵۳/۸۵۷ | ۵۳/۳۹۲۲ | ۵۲/۰۸۲۱ |

در جدول (۲) اثر پارامتر ضخامت γ بر روی λ نشان داده شده است که مانند صفحات گیردار در این صفحات نیز با افزایش مقدار γ از 0.3 تا 0.3 ، λ افزایش پیدا می‌کند. همچنین در این جدول اثر تغییرات r_b بر روی λ نشان داده شده است همانطور که در جدول مشاهده می‌شود با افزایش مقدار r_b ، λ کاهش می‌یابد. پس در صفحات حلقوی با تکیه گاه ساده با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی (r_b)، مقاومت صفحه در برابر کماتش کاهش می‌یابد. در حالی که در صفحات گیردار افزایش r_b ابتدا باعث کاهش و سپس افزایش λ می‌گردد.

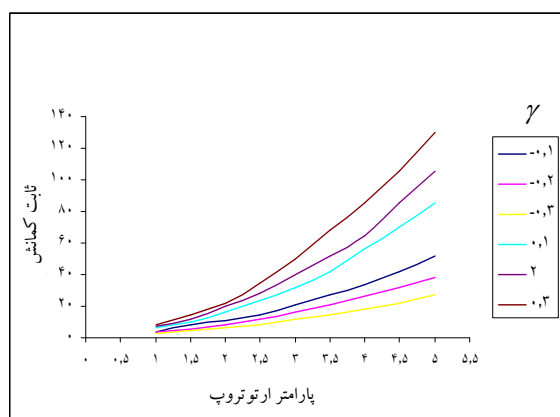
ج) صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش

در جداول (۳) تا (۵) نتایج تحلیل کماتش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش برای سه مقدار مختلف β ($\sqrt{5}, \sqrt{3}, 1$) نشان داده شده است. در این جداول اثر پارامترهای $\varphi, \beta, r_b, \gamma$ (که نشان دهنده سختی چرخشی است) بررسی شده است. همچون دو حالت قبل (صفحات گیردار و تکیه گاه ساده) در این نوع صفحات نیز با افزایش مقدار γ از 0.3 تا 0.3 یا به عبارت دیگر با افزایش نسبت ضخامت صفحه در لبه خارجی نسبت به لبه داخلی آن، مقدار ثابت کماتش λ و یا مقاومت صفحه در برابر کماتش افزایش می‌یابد. در دو حالت قبل پارامتر β اثر مستقیم بر روی مقدار λ داشت یعنی با افزایش

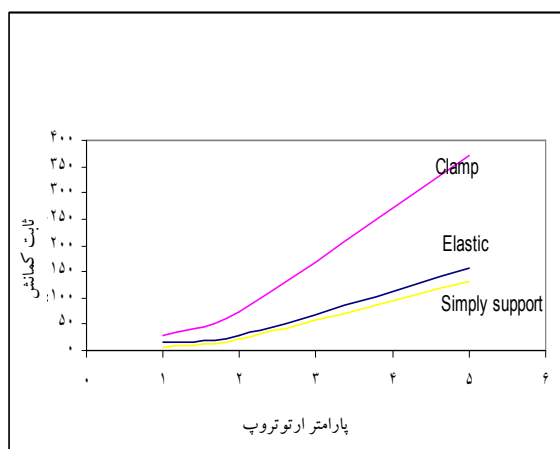
شده است. همانطور که در این شکلها دیده می‌شود با افزایش β و همچنین با افزایش مقدار γ از 0.3 تا 0.1 مقدار λ افزایش پیدا می‌کند. ثابت کماتش صفحات گیردار نسبت به صفحات با تکیه گاه ساده بیشتر است.



شکل (۲) منحنی تغییرات ثابت کماتش صفحات دایره‌ای ارتوتروپ گیردار با ضخامت متغیر



شکل (۳) منحنی تغییرات ثابت کماتش صفحات دایره‌ای با تکیه گاه ساده با ضخامت متغیر



شکل (۴) مقایسه ثابت کماتش صفحات دایره‌ای با تکیه گاههای مختلف برای $\gamma = 0.3$

جدول (۵) ثابت کماتش صفحات حلقوی ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم در برابر چرخش و با ضخامت متغیر خطی ($\beta = \sqrt{5}$)

| γ | ϕ | F_b | | | | |
|----------|----------|---------|---------|---------|---------|----------|
| | | ۰.۱ | ۰.۲ | ۰.۳ | ۰.۴ | ۰.۵ |
| ۰.۳ | ۰ | ۷/۴۴۹۸۱ | ۷/۴۲۷۶۳ | ۷/۳۰۱۸۸ | ۶/۹۵۲۱۴ | ۶/۳۵۲۰۱ |
| | ۱۰ | ۲۰/۳۹۸ | ۲۰/۳۲۳۱ | ۱۹/۹۷۰۲ | ۱۹/۳۵۵۷ | ۱۹/۲۵۶۹ |
| | ∞ | ۲۲/۵۳۶۷ | ۲۲/۴۴۳۳ | ۲۲/۰۷۳۶ | ۲۲/۳۹۶ | ۲۲/۵۷۳۵ |
| ۰.۱ | ۰ | ۱۲/۴۱۲۷ | ۱۲/۳۶۲۸ | ۱۲/۱۶۰۲ | ۱۱/۶۴۷۹ | ۱۰/۸۳ |
| | ۱۰ | ۳۱/۳۳۹۲ | ۳۱/۲۸۱۵ | ۳۰/۸۹۹۷ | ۳۰/۲۳۵۹ | ۳۰/۵۷۷۵ |
| | ∞ | ۳۹/۴۹۴۱ | ۳۹/۳۹۹۱ | ۳۸/۸۴۵۶ | ۳۸/۳۱۳۳ | ۴۰/۱۰۳ |
| ۰ | ۰ | ۱۵/۵۲۰۴ | ۱۵/۴۶۹ | ۱۵/۲۲۷۵ | ۱۴/۶۲۷۶ | ۱۳/۷۰۴۲۱ |
| | ۱۰ | ۳۷/۱۳۶ | ۳۷/۰۶۷۸ | ۳۶/۶۵۴ | ۳۶/۰۵۸ | ۳۶/۶۳۳۸ |
| | ∞ | ۴۹/۴۲۸۶ | ۴۹/۳۰۵۸ | ۴۸/۶۲۲ | ۴۸/۴۰۱ | ۵۱/۴۹۷۱ |
| ۰.۱ | ۰ | ۱۹/۱۰۳۶ | ۱۹/۰۴۸۵ | ۱۸/۷۶۴ | ۱۸/۰۷۴۵ | ۱۷/۰۵۰۹ |
| | ۱۰ | ۴۳/۱۳۸۵ | ۴۳/۰۶۱۴ | ۴۲/۶۱۸۱ | ۴۲/۰۷۶۸ | ۴۲/۸۷۲۵ |
| | ∞ | ۶۰/۸۸۸۴ | ۶۰/۶۲۳۴ | ۵۹/۹۲۲۷ | ۶۰/۰۶۹۲ | ۶۴/۸۴۶۲ |
| ۰.۳ | ۰ | ۲۷/۸۲۵۱ | ۲۷/۵۵۹ | ۲۷/۳۷۵۴ | ۲۶/۵۰۷۱ | ۲۵/۳۰۸۳ |
| | ۱۰ | ۵۵/۷۷۳۳ | ۵۵/۶۷۲۱ | ۵۵/۱۸۲ | ۵۴/۲۲۳ | ۵۵/۸۶۲۵ |
| | ∞ | ۸۸/۰۴۳۳ | ۸۷/۸۸۱ | ۸۷/۰۷۹۶ | ۸۸/۵۷۸۱ | ۹۸/۰۱ |

(د) صفحات دایره‌ای ارتوتروپ با تکیه گاه الاستیک مقاوم در برابر چرخش

در جدول (۶) اثر پارامترهای ϕ, γ, β بر روی ثابت کماتش صفحات دایره‌ای ارتوتروپ نشان داده شده است.

جدول (۶) ثابت کماتش صفحات دایره‌ای ارتوتروپ با تکیه گاه مقاوم الاستیک در برابر چرخش و ضخامت متغیر خطی

| β^t | γ | ϕ | | | |
|-----------|----------|---------|---------|---------|----------|
| | | ۰ | ۱ | ۱۰ | ∞ |
| ۱ | ۰.۳ | ۲/۵۰۳۷۸ | ۴/۵۶۱۶۱ | ۷/۳۶۵۶۵ | ۸/۰۵۴۵۲ |
| | ۰.۲ | ۳/۰۱۳۸۲ | ۵/۱۳۳۵۸ | ۸/۹۱۶۶۴ | ۱۰/۰۳۵ |
| | ۰.۱ | ۳/۵۷۷۲۳ | ۵/۷۲۵۳۹ | ۱۰/۵۲۲۳ | ۱۲/۲۴۴۶ |
| | ۰ | ۴/۱۹۷۷۹ | ۶/۳۵۳۲۳ | ۱۲/۱۷۲۵ | ۱۴/۶۸۲ |
| | ۰.۱ | ۴/۸۷۹۱۷ | ۷/۰۲۸۸۹ | ۱۳/۸۴۴۵ | ۱۷/۳۵۷۹ |
| | ۰.۲ | ۵/۶۲۴۹۷ | ۷/۷۶۱۲۹ | ۱۵/۵۲۴۱ | ۲۰/۲۷۶۳ |
| | ۰.۳ | ۶/۴۳۲۱ | ۸/۵۵۶۱۴ | ۱۷/۱۹۶۹ | ۲۳/۴۳۰۷ |
| ۲ | ۰.۳ | ۳/۸۸۸۹۱ | ۶/۶۵۸۰۹ | ۱۱/۱۵۱۲ | ۱۲/۳۸۷۹ |
| | ۰.۲ | ۴/۸۵۵۰۴ | ۷/۶۹۴۷۲ | ۱۳/۳۴۹۶ | ۱۵/۸۰۲۱ |
| | ۰.۱ | ۵/۹۵۵۲ | ۸/۸۲۲۸۶ | ۱۶/۴۵۱۲ | ۱۹/۶۹۵۳ |
| | ۰ | ۷/۱۹۸۷۶ | ۱۰/۰۶۸۷ | ۱۹/۲۵۹۹ | ۲۴/۰۸۳ |
| | ۰.۱ | ۸/۵۹۵۰۱ | ۱۱/۴۲۲۴ | ۲۲/۱۲۸۱ | ۲۸/۳۷۳۲ |
| | ۰.۲ | ۱۰/۱۵۳۳ | ۱۲/۹۸۹۴ | ۲۵/۰۳۴۷ | ۳۲/۳۷۳۲ |
| | ۰.۳ | ۱۱/۸۸۲۹ | ۱۴/۶۹۲۹ | ۲۷/۹۷۱۴ | ۴۰/۳۰۴۵ |
| ۵ | ۰.۳ | ۷/۴۵۰۶۳ | ۱۱/۶۴۱۶ | ۲۰/۴۰۱ | ۲۲/۳۳۴۴ |
| | ۰.۲ | ۹/۷۲۶۴ | ۱۳/۹۹۹۴ | ۲۵/۶۵۵۲ | ۳۰/۷۰۹۶ |
| | ۰.۱ | ۱۲/۴۰۵۴ | ۱۶/۷۰۵۲ | ۳۱/۲۳۵۴ | ۳۹/۳۳۷۶ |
| | ۰ | ۱۵/۵۲۰۹ | ۱۹/۸۱۶ | ۳۷/۰۶۴ | ۴۹/۳۰۵۴ |
| | ۰.۱ | ۱۹/۱۰۶۵ | ۲۳/۳۷۹۸ | ۴۳/۱ | ۶۰/۷۱۳۸ |
| | ۰.۲ | ۲۳/۱۹۵۴ | ۲۷/۴۳۸۱ | ۴۹/۳۳۴۵ | ۷۳/۶۴ |
| | ۰.۳ | ۲۷/۸۲۰۵ | ۳۲/۰۲۸۳ | ۵۵/۷۹۱۴ | ۸۸/۱۵۷۷ |

(ه) صفحات دایره‌ای ارتوتروپ با تکیه گاه گیردار و ساده

در شکل (۲) منحنی تغییرات ثابت کماتش صفحات ارتوتروپ گیردار با ضخامت متغیر خطی و در شکل (۳) منحنی تغییرات ثابت کماتش صفحات ارتوتروپ ضخامت متغیر خطی با تکیه گاه ساده برای مقادیر مختلف γ نشان داده

۲- با تغییر ضخامت صفحات (γ) ثابت کمانش آنها تغییر می‌نماید و این تغییر در هر دو جهت افزایش و کاهش می‌باشد. در نتیجه با استفاده از صفحات ضخامت متغیر مناسب (ضخامت لبه خارجی صفحه از ضخامت مرکز صفحه بیشتر باشد یا $\gamma > 0$) می‌توان مقاومت صفحات را در برابر کمانش افزایش داد.

۳- با تغییر تکیه گاه از تکیه گاه ساده به تکیه گاه گیردار، ثابت کمانش افزایش می‌یابد.

۴- با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی صفحات حلقوی مقدار λ افزایش پیدا می‌کند.

فهرست علائم

| | |
|------------|--------------------------------|
| a | شعاع خارجی صفحه حلقوی، mm |
| b | شعاع داخلی صفحه حلقوی، mm |
| h | ضخامت صفحات، mm |
| E | مدول الاستیسیته، N/m^2 |
| E_r | مدول الاستیسیته شعاعی، N/m^2 |
| E_θ | مدول الاستیسیته مماسی، N/m^2 |
| N_r | نیروی محوری، N |
| N_θ | نیروی مماسی، N |
| w | جابجایی مرکز ورق، mm |
| J | انرژی پتانسیل ورق |
| h_c | ضخامت در مرکز صفحه، mm |
| r_b | نسبت شعاع داخلی به خارجی |
| k | پارامتر نمایش |

علائم یونانی

| | |
|--------------|-------------------|
| λ | ثابت کمانش |
| γ | ضریب ضخامت ورق |
| ν_r | ضریب پواسون شعاعی |
| ν_θ | ضریب پواسون مماسی |
| D_θ | صلبیت خمشی مماسی |
| D_r | صلبیت خمشی شعاعی |
| β | پارامتر ارتوتروپ |

در شکل (۴) کمانش صفحات دایره‌ای شکل بر اساس تکیه گاههای ساده، الاستیک و گیردار رسم شده است. همانطور که انتظار می‌رفت بار بحرانی صفحه با لبه‌های گیردار به مراتب بیشتر از وضعیت مرزی ورق با تکیه گاه ساده است. در جدول (۷) نتایج ثابت کمانش صفحات دایره‌ای گیردار ارتوتروپ با ضخامت متغیر خطی حاصل از روش ریلی - ریتز بهینه شده و المان محدود که با استفاده از نرم افزار ANSYS به دست آمده مقایسه شده که مطابقت خوبی را نشان می‌دهد.

جدول (۷) مقایسه نتایج روش ریلی - ریتز بهینه شده روش المان محدود برای صفحات دایره‌ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر (I نتایج روش ریلی - ریتز بهینه شده، II نتایج نرم افزار ANSYS)

| β^2 | | γ | | | | | | |
|-----------|----|----------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| | | -۰/۳ | -۰/۲ | -۰/۱ | ۰ | ۰/۱ | ۰/۲ | ۰/۳ |
| ۱ | I | ۸/۰۵ | ۱۰/۰۲ | ۱۲/۲۴ | ۱۴/۶۸۲ | ۱۷/۳۶ | ۲۰/۲۸ | ۲۳/۴۳ |
| | II | ۷/۸ | ۹/۸۲۵ | ۱۲/۱۱ | ۱۴/۶۸۲ | ۱۷/۵۳ | ۲۰/۶۹ | ۲۴/۱۵ |
| ۱/۴ | I | ۹/۸۷ | ۱۲/۴۳ | ۱۵/۳۲ | ۱۸/۵۴۲ | ۲۲/۱ | ۲۶/۰۴ | ۳۰/۲۶ |
| | II | ۹/۷۲ | ۱۲/۳۱ | ۱۵/۲۴ | ۱۸/۵۴۱ | ۲۲/۳۱ | ۲۶/۲۸ | ۳۰/۷۵ |
| ۱/۸ | I | ۱۱/۵۶ | ۱۴/۶۹ | ۱۸/۲۵ | ۲۲/۲۳۶ | ۲۶/۶۷ | ۳۱/۵۷ | ۳۶/۹۴ |
| | II | ۱۱/۵۵ | ۱۴/۶۷ | ۱۸/۲۳ | ۲۲/۲۳۴ | ۲۶/۷ | ۳۱/۶۶ | ۳۷/۱۱ |

۸- نتیجه گیری نهایی

در این تحقیق کمانش صفحات حلقوی و دایره‌ای ارتوتروپ با ضخامت متغیر خطی با تکیه گاههای ساده، گیردار و مقاوم الاستیک در برابر چرخش تحت فشار خارجی یکنواخت بررسی شده است. در تحلیل انجام شده از روش ریلی - ریتز بهینه شده و نرم افزار ANSYS استفاده شده است که در روش ریلی - ریتز بهینه شده از توابع چند جمله‌ای که بر اساس تغییر شکل استاتیک صفحات دایره‌ای و حلقوی ارتوتروپ می‌باشد استفاده شده است. در این روش از یک پارامتر نمایشی استفاده می‌شود که ثابت کمانش نسبت به این پارامتر حداقل می‌گردد و کمترین ثابت کمانش بحرانی به دست می‌آید. با توجه به نتایج نشان داده شده در جداول و شکل‌های قبل نکات زیر در مورد صفحات دایره‌ای و حلقوی قابل استخراج است:

۱- با افزایش مقدار β مقدار ثابت کمانش (λ) افزایش می‌یابد. با توجه به این نکته می‌توان با انتخاب صفحاتی با رفتار ارتوتروپیک، مقاومت آنها را می‌توان در برابر کمانش افزایش داد.

مراجع

- [۱] Woinowski-Krieger, S., Buckling stability of circular plates with circular cylindrical Aeolotropy, *Ingenieur-Archiv*, Vol. ۲۶, ۱۹۵۸, pp. ۱۲۹-۱۳۱
- [۲] Meink T., Huybrechts S., Ganley J., "The Effect of varying thickness on the buckling of orthotropic plates, *J. Composite Materials*, Vol. ۳۳, ۱۹۹۹, pp. ۱۰۴۸-۱۰۶۱.
- [۳] Laura P.A.A., Gutierrez R.H., Sanzi H.C., Elvira G., buckling of circular, solid and annular plates with an intermediate circular support, *J. Ocean Engineering*, Vol. ۲۷, ۲۰۰۰, pp. ۷۴۹-۷۵۵
- [۴] Ciancio P.M, Reyes J.A., Buckling of circular annular plates of continuously variable thickness used as internal bulkheads in submersibles, *J. Ocean engineering*, Vol. ۳۰, ۲۰۰۳, pp. ۱۳۲۳-۱۳۳۳
- [۵] Bostjan B., Kosel F., Thickness optimization of circular annular plates at buckling, *Thin-Walled Structures*, Vol. ۳۲, ۲۰۰۶, ۷۴-۸۱.
- [۶] Gutierrez R.H., Romanlli E., Laura P.A.A., Vibration and elastic stability of thin circular plates with variable profile, *J. Sound and Vibration*, Vol. ۱۹۵, ۱۹۹۶, ۳۹۱-۳۹۹.
- [۷] Liang B., Zhang Sh, Dian-Yun Chen, Natural frequencies of circular annular plates with variable thickness by a new method, *J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. ۸۴, ۲۰۰۷, ۲۹۳-۲۹۷.
- [۸] Timoshenko, S. P., Gere, J. M., Theory of elastic stability, ۲nd Ed, McGraw-Hill, New York, ۱۹۶۱.
- [۹] Venstel E., Thin plates and shells, Dekker Publication, ۲۰۰۱.
- [۱۰] Chuen-Yuan Chia, Nonlinear Analysis of Plates, McGraw-Hill, ۱۹۸۰.