

تحلیل کماتش حرارتی ورق دایره‌ای مدرج تابعی با لایه‌های محرک- محرک پیزوالکتریک براساس روش صفحه خنثی

محمد مهدی نجفی زاده^{1*} محسن مالمراد² آرش شریفی³

* نویسنده مسئول: M-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

چکیده

در این مقاله، کماتش حرارتی ورق دایره‌ای شکل ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک براساس محل صفحه خنثی و به کمک تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات بررسی شده است. خواص ورق مدرج تابعی براساس مدل ردی در نظر گرفته شده است. ورق تحت بارگذاری حرارتی، افزایش غیر خطی درجه حرارت در راستای ضخامت و با شرایط مرزی گیردار فرض شده است. معادلات تعادل و پایداری با استفاده از حساب تغییرات و اعمال معادلات اویلر به دست آمده است. در پایان، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کماتش براساس تئوری‌های یاد شده برای یک ورق نمونه با نتایج به دست آمده توسط سایر محققان مقایسه شده است که تطابق خوبی بین آنها مشاهده شد.

واژه‌های کلیدی: کماتش حرارتی، لایه‌های پیزوالکتریک، ورق دایره‌ای، مواد مدرج تابعی.

1- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک.

2- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، اداره کل استاندارد و تحقیقات صنعتی استان کرمانشاه.

3- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، شرکت نفت کرمانشاه.

1- مقدمه

در سالهای اخیر مواد تابعی یا مدرج تابعی¹ در صنعت به ویژه در محیط‌های با درجه حرارت بسیار بالا مانند راکتورهای هسته‌ای، توربین‌ها و اجزای ماشین‌های پر قدرت به کار می‌روند. پیش‌بینی می‌شود با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد این مواد، کاربردهای صنعتی آن طی سالهای آتی توسعه یابد.

ماده تابعی یک ماده مصنوعی با ریز ساختار غیر همگن است که خواص مکانیکی آن به طور ملایم و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به وسیله تغییر یکنواخت نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده به دست می‌آید. نوع رایج مواد تابعی از ترکیب سرامیک و فلز حاصل می‌شود. این مواد برای اولین بار در سال 1984 در آزمایشگاه هوافضای نینو در ژاپن به صورت عایق حرارتی مطرح شدند [1]. در این مواد مولفه سرامیکی باعث مقاومت در برابر دماهای بالا می‌شود و از سوی دیگر مولفه فلزی باعث انعطاف پذیری و جلوگیری از رشد ترک و شکست ماده در اثر تنش‌های حرارتی بسیار بالا می‌گردد. همچنین، پیوستگی تغییرات ریزساختاری این مواد باعث برتری آنها نسبت به انواع مواد مرکب لایه‌ای شده است.

پس از پیدایش مدرج تابعی تحقیقات گسترده‌ای بر روی این مواد انجام شد. محققان بسیاری پایداری ترموالاستیک ورق‌های مستطیلی و دایره‌ای شکل تحت بارگذاری‌های متعدد و شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار داده‌اند. صمصام و همکارانش [2] تحلیل کماتش ورق مستطیلی مدرج تابعی تحت بارهای مکانیکی و حرارتی را مورد بررسی قرار داده‌اند. ژانگ و گو [3] حل دقیق مسئله کماتش یک ورق مستطیلی کامپوزیت با لایه‌های به هم پیوسته را که دارای تکیه‌گاههای غلتکی و تحت تاثیر بارهای متغیر خطی در لبه‌ها است به دست آوردند. این حل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسعه پیدا کرده است. باترا و وی [4] کماتش ورق نازک مستطیلی ترموویسکوپلاستیک را با برهم نهی اغتشاشات بینهایت کوچک اعمالی روی صفحه مورد مطالعه قرار دادند.

اسلامی و همکارانش [5] کماتش ترموالاستیک ورق‌های مرکب لایه‌ای اورتوتروپیک را بر اساس تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی صفحات با نقص اولیه مورد مطالعه قرار دادند. نجفی‌زاده و اسلامی [6-7] پایداری حرارتی و مکانیکی ورق دایره‌ای مدرج تابعی را بر اساس تئوری کلاسیک صفحات و فرضیات ساندرز مورد مطالعه قرار دادند. جواهری و اسلامی [8-10] کماتش مکانیکی و حرارتی ورق مستطیلی مدرج تابعی را با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی صفحات مورد بررسی قرار دادند.

کمانش حرارتی و مکانیکی ورق دایره‌ای مدرج تابعی با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات توسط نجفی‌زاده و حیدری [11-12] مورد مطالعه قرار گرفته است. ما و ونگ [13] خمش غیر خطی و کماتش ورق دایره‌ای شکل مدرج تابعی را تحت اثر بارهای مکانیکی و حرارتی مورد بررسی قرار داده‌اند.

تیرستن [14] برای اولین بار معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق‌های پیزوالکتریک را به دست آورد و همچنین مبانی الکترومکانیکی این مواد را مورد بررسی قرار داد. ردی و فان [15] نیز معادلات حاکم بر ورق‌های پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری‌های مختلف صفحات به دست آورده است. آلدرایهم و خدیر [16] معادلات تیر تیموشکو و اولر را با داشتن عملگرهای پیزوالکتریک در حالت استاتیکی به صورت تحلیلی به دست آوردند. وانگ و همکارانش [17] معادلات ورق کامپوزیت هوشمند که دارای عمگر پیزوالکتریک است را به صورت کنترل استاتیکی مورد بررسی قرار دادند. رابینز و ردی [18] معادلات تیر کامپوزیت که دارای یک لایه پیزوالکتریک می‌باشد را بر اساس تئوری اولیر - برنولی در حالت استاتیکی و با استفاده از روش حل تئوری لایه مجزا ارائه دادند.

در این مقاله برای اولین بار کماتش حرارتی ورق دایره‌ای مدرج تابعی با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک براساس روش محل صفحه خشی فیزیکی و به کمک تئوری کلاسیک صفحات و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات بررسی شده است. در کارهای پیشین معادلات بر اساس صفحه میانی ورق به دست آمده‌اند و تحلیل بر اساس

روابط کرنش - جابه‌جایی

به کمک تئوری کلاسیک صفحات، جابه‌جایی‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} U(r, \theta, z) &= u(r, \theta) - (z - z_0) \frac{\partial w}{\partial r} \\ V(r, \theta, z) &= v(r, \theta) - (z - z_0) \frac{\partial w}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

$$W(r, \theta, z) = w(r, \theta)$$

به طوری که W, V, U به ترتیب جابه‌جایی‌ها در جهات z, θ, r هستند و z_0 مطابق رابطه (2) به دست می‌آید.

روابط کرنش - جابه‌جایی برای ورق دایره‌ای براساس روابط غیرخطی ساندروز به صورت زیر است [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= u_{,r} + \frac{1}{2} \beta_r^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} v_{,\theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \beta_\theta^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{v}{r} + \beta_r \beta_\theta$$

به طوری که:

$$\begin{aligned} \beta_r &= -w_{,r} \\ \beta_\theta &= -\frac{1}{r} w_{,\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ کرنش‌های نرمال در صفحه خشی ورق FGM هستند و مؤلفه‌های کرنش نرمال $\bar{\varepsilon}_r, \bar{\varepsilon}_\theta$ در هر نقطه از ضخامت ورق به فاصله z از سطح میانی مطابق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r &= \varepsilon_r + (z - z_0) k_r \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + (z - z_0) k_\theta \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta} + (z - z_0) k_{r\theta}$$

k_r, k_θ معرف انحنایها و $k_{r\theta}$ پیچش می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} k_r &= \beta_{r,r} \\ k_\theta &= \frac{1}{r} (\beta_r + \beta_{\theta,\theta}) \\ k_{r\theta} &= \frac{2}{r} (\beta_{r,\theta} - \beta_\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

ورق FGM

ورق FGM ترکیبی از سرامیک و فلز یا مواد دیگر است. در این مقاله از مدل ردی برای بیان خواص مواد تابعی استفاده شده است. براساس این مدل چنانچه محور مختصات در جهت ضخامت ورق را z بنامیم خواص ورق FGM به صورت زیر تعریف می‌شود:

آنها انجام گرفته است. در این مطالعه ورق تحت بارگذاری حرارتی با افزایش غیرخطی درجه حرارت در راستای ضخامت و با شرایط مرزی گیردار فرض شده است. معادلات تعادل و پایداری با استفاده از حساب تغییرات و اعمال معادلات اویلر به دست آمده است. در پایان، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش براساس تئوری‌های یاد شده برای یک ورق نمونه آورده شده است.

2- فرمول بندی ریاضی و تعاریف مواد

در ادامه فرمول‌بندی ریاضی و تعاریف مواد تابعی طبق مراحل ذیل مورد بحث قرار گرفته است:

صفحه خشی فیزیکی

در همه مقالات بیان شده در قسمت قبل، سطح میانی هندسی به عنوان مرجع انتخاب شده است و مشخصه آن این است که تاثیر کوپل خمش و کشش در معادلات ساختاری به وجود می‌آید و معادلات و شرایط مرزی به کار برده شده فرم پیچیده‌ای به خود می‌گیرند. بنابراین روش حل آنها دشوار است.

موریموتو و همکارانش [19] نشان دادند که اگر در معادلات ساختاری سطح مرجع به درستی انتخاب شود هیچ اثری از ترکیب خمش و کشش وجود ندارد. به منظور تعیین محل سطح مرجع، شرط زیر در راستای مختصه z تعریف می‌شود [19]

$$\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z - z_0) E(z) dz = 0 \quad (1)$$

بنابراین فاصله z_0 از سطح میانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$z_0 = \frac{\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z E(z) dz}{\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz} \quad (2)$$

به طوری که z_0 محل صفحه خشی فیزیکی از سطح میانی است.

روابط ساختاری لایه‌های محرک پیزوالکتریک

معادله ماکسول برای لایه‌های محرک پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شود [22]:

$$D = g.E \Rightarrow \nabla \cdot D = 0 \quad (14)$$

به طوری که E, g, D به ترتیب جابه‌جایی الکتریکی، ثابت دی‌الکتریک و میدان الکتریکی‌اند. اگر لایه‌های پیزوالکتریک نازک باشند، جابه‌جایی الکتریکی در راستای r, θ ثابت فرض می‌شود. بنابراین معادله شارژ (14) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{dD_z}{dz} = 0 \quad (15)$$

اگر میدان پتانسیل ایجاد شده در لایه‌ها را تابع درجه دوم از ضخامت فرض کنیم؛ خواهیم داشت [20]:

$$\phi = \phi_0 + (z - z_0)\phi_1 + (z - z_0)^2\phi_2 \quad (16)$$

شرایط مرزی الکتریکی برای لایه‌های پایینی و بالایی پیزوالکتریک به صورت زیر است:

$$\begin{cases} z = -\frac{h}{2} \rightarrow \phi^l = 0 \\ z = -\frac{h}{2} - h_p \rightarrow \phi^l = V^l \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} z = \frac{h}{2} \rightarrow \phi^u = 0 \\ z = \frac{h}{2} + h_p \rightarrow \phi^u = V^u \end{cases} \quad (18)$$

به طوری که h_p ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک بوده و V^l, V^u به ترتیب ولتاژهای اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک بالایی و پایینی هستند. با اعمال شرایط (18) و (17) در معادله (16) خواهیم داشت:

$$\phi_1^l = -\frac{V^l}{h_p} + 2(h_m + z_0)\phi_2^l \quad (19)$$

$$\phi_1^u = \frac{V^u}{h_p} - 2(h_m - z_0)\phi_2^u$$

که در رابطه فوق $h_m = \frac{h + h_p}{2}$ است. حال با ترکیب معادله

$$(13-ب) \text{ با (15) و با توجه به } E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ و معادلات (16)}$$

و (19)، میدان در لایه‌های محرک پیزوالکتریک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$p(z) = (p_0 - p_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k + p_m \quad (8)$$

که p_m, p_c مطابق با خصوصیات سرامیک و فلز است. همچنین در این مدل نسبت پواسون به علت نزدیک بودن ضرایب پواسون فلز و سرامیک ثابت در نظر گرفته می‌شود

$$v(z) = v_0 \quad (9)$$

و k ثابتی است که بین صفر تا بی نهایت تغییر می‌کند [11].

رابطه تنش- کرنش در ورق FGM

روابط تنش - کرنش با در نظر گرفتن اثرات حرارت برای ورق FGM به صورت زیر نوشته می‌شود [21]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{rr} \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} \\ \bar{\sigma}_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{rr} - \alpha T \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} - \alpha T \\ \bar{\epsilon}_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

به طوری که

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1 - v_0^2}, \quad C_{12} = C_{21} = C_{11}v_0 \quad (11)$$

$$C_{44} = \frac{E(z)}{2(1 + v_0)}, \quad \alpha = \alpha(z)$$

$\bar{\sigma}_{ij}$ تنش‌های نرمال و $\bar{\tau}_{ij}$ تنش‌های برشی در هر نقطه از ضخامت ورق FGM به فاصله z از سطح میانی را نشان می‌دهند.

روابط مواد پیزوالکتریک

روابط ساختاری برای مواد پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شود [21]:

$$\{\sigma\} = [C^P] \{\epsilon\} - [e]^T \{E\} \quad (12)$$

$$\{D\} = [e] \{\epsilon\} + [g]^T \{E\}$$

و یا به فرم ماتریسی

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (13-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{rr} \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\epsilon}_{r\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (13-ب)$$

به طوری که $\{\bar{\sigma}\}$ بردار مؤلفه‌های تنش، $\{\bar{\epsilon}\}$ بردار مؤلفه‌های کرنش، $\{E\}$ بردار مؤلفه‌های شدت میدان الکتریکی، $\{D\}$ بردار مؤلفه‌های جابجایی الکتریکی، $[C^P]$ ماتریس مدول الاستیسیته، $[e]$ ماتریس ضریب کرنش پیزو الکتریک و $[g]$ ماتریس ضریب دی‌الکتریک هستند.

$$V = \int \int_{\circ \circ} F \cdot dr \cdot d\theta \quad (25)$$

به طوری که

$$F = \left\{ \frac{A_1}{2} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2) + A_2 \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \frac{A_1 - A_2}{4} \varepsilon_{r\theta}^2 + \frac{B_3}{2} (k_r^2 + k_\theta^2) + B_4 k_r k_\theta + \frac{B_3 - B_4}{4} k_{r\theta}^2 + A_5 (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + B_5 (k_r + k_\theta) + A_3 (\varepsilon_r k_r + \varepsilon_\theta k_\theta) + A_4 (\varepsilon_r k_\theta + \varepsilon_\theta k_r) + \frac{A_3 - A_4}{2} \varepsilon_{r\theta} k_{r\theta} + \frac{1}{1-\nu_0} T^* + E^* \right\} \cdot r \quad (26)$$

که در رابطه فوق

$$T^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) [\alpha(z) T(z)]^2 \cdot dz \quad (27)$$

$$E^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g_{33} (E_z^l)^2 \cdot dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} g_{33} (E_z^u)^2 \cdot dz$$

در حالی که F در رابطه انرژی پتانسیل کل تابعی از سه متغیر وابسته w, v, u و مشتقات مرتبه اول v, u و مشتقات w تا مرتبه دوم و متغیرهای مستقل r, θ باشد، معادلات اویلر به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial u_{,r}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial u_{,\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial v_{,r}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial v_{,\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial w_{,r}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial w_{,\theta}} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{\partial F}{\partial w_{,rr}} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial F}{\partial w_{,r\theta}} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\partial F}{\partial w_{,\theta\theta}} = 0 \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه (27) در معادلات اویلر (28)، معادلات تعادل ورق دایره‌ای شکل FGM با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_z^l = \frac{V^l}{h_p} - (z + h_m) \frac{e_{31}}{g_{33}} (k_x + k_y) \quad (20)$$

$$E_z^u = -\frac{V^u}{h_p} - (z - h_m) \frac{e_{31}}{g_{33}} (k_x + k_y)$$

3- معادلات تعادل و پایداری

نیروها و گشتاورها در واحد طول مطابق رابطه زیر بر حسب مؤلفه‌های تنش بیان می‌شود:

$$(N_{ij}, M_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \bar{\sigma}_{ij} (1, (z - z_0)) dz \quad (21)$$

با جایگذاری روابط (6)، (8)، (10) و (13) در رابطه (21) و اعمال انتگرال‌ها، معادلات ساختاری ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N_r = A_1 \varepsilon_r + A_2 \varepsilon_\theta + A_3 k_r + A_4 k_\theta + A_5$$

$$N_\theta = A_2 \varepsilon_r + A_1 \varepsilon_\theta + A_4 k_r + A_3 k_\theta + A_5$$

$$N_{r\theta} = \frac{A_1 - A_2}{2} \varepsilon_{r\theta} + \frac{A_3 - A_4}{2} k_{r\theta}$$

$$M_r = B_1 \varepsilon_r + B_2 \varepsilon_\theta + B_3 k_r + B_4 k_\theta + B_5$$

$$M_\theta = B_2 \varepsilon_r + B_1 \varepsilon_\theta + B_4 k_r + B_3 k_\theta + B_5 \quad (22)$$

$$M_{r\theta} = \frac{B_1 - B_2}{2} \varepsilon_{r\theta} + \frac{B_3 - B_4}{2} k_{r\theta}$$

عبارات $B_i, A_i (i=1,2,\dots,5)$ در پیوست الف آورده شده‌اند.

در حالت کلی، وقتی که ورق تحت بار مکانیکی و حرارتی قرار دارد و لایه‌های پیزوالکتریک تحت میدان الکتریکی است انرژی کل پتانسیل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = U + \Omega \quad (23)$$

که U انرژی کرنشی ورق و لایه‌های پیزوالکتریک بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} - D_i E_i) dv \quad (24)$$

همچنین Ω انرژی پتانسیل نیروهای مکانیکی اعمالی بر ورق است و چون ورق فقط تحت بار حرارتی است این ترم برابر صفر است.

با جایگذاری از روابط تنش - کرنش در روابط انرژی پتانسیل کل و انتگرال گیری در جهت ضخامت خواهیم داشت:

در اینجا زیرنویس‌های 1 بیانگر تنش‌های منتجه حالت پایداری است و زیرنویس‌های 0 بیانگر تنش‌های منتجه حالت تعادل است. $N_{r0}, N_{\theta0}, N_{r\theta0}$ نیروهای پیش‌کمانش بوده و از حل معادلات تعادل در حالت غشایی به دست می‌آیند. به طور مشابه معادلات تعادل و پایداری به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات به دست خواهند آمد که در پیوست (ب) آورده شده‌اند.

4- تحلیل کمانش حرارتی

یک ورق دایره‌ای از جنس ماده FGM با دو لایه پیزوالکتریک از نوع محرک-محرک مفروض است. ورق با شرایط مرزی گیردار فرض می‌شود. از آنجا که در یک ورق FGM خواص مادی در جهت ضخامت ورق متغیر است، بهتر است تابع بارگذاری حرارتی از حل معادله انتقال حرارت به دست آید. از طرفی چون خواص حرارتی ورق مانند ضریب هدایت حرارتی k به طور دلخواه تغییر می‌کند به دست آوردن تغییرات واقعی دما در حالت گذرا تقریباً غیرممکن است. بنابراین در تحلیل حاضر، مسئله انتقال حرارت در حالت پایا در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه دمای T تنها تابع مختصه z است، رابطه انتقال حرارت در حالت پایا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dz} [k(z) \frac{dT}{dz}] = 0 \quad (32)$$

شرایط مرزی حرارتی ورق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} T = T_c & \quad z = \frac{h}{2} \\ T = T_m & \quad z = -\frac{h}{2} \end{aligned} \quad (33)$$

ضریب هدایت حرارتی $k(z)$ مشابه با سایر خواص مکانیکی و حرارتی ماده FGM توسط رابطه توانی بیان می‌شود

$$k(z) = k_m + k_{cm} \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (34)$$

به طوری که

$$k_{cm} = k_c - k_m \quad (35)$$

به ترتیب ضرایب هدایت حرارتی فلز و سرامیک‌اند. با جایگذاری رابطه (34) در معادله (32) و انجام تغییر

$$\begin{aligned} N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) &= 0 \\ N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta} &= 0 \\ (r.M_r)_{,rr} + 2M_{r\theta,r} + \frac{1}{r} M_{\theta,\theta\theta} &+ \end{aligned} \quad (29)$$

$(r.w_r.N_r + w_{,\theta}.N_{r\theta} - M_\theta)_{,r} + (\frac{1}{r}.w_{,\theta}.N_\theta + w_{,r}.N_{r\theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta})_{,\theta} = 0$
معادلات پایداری ورق‌ها به وسیله روش تغییرات¹ قابل دستیابی است. اگر V معرف انرژی پتانسیل کل ورق باشد، بسط آن نسبت به حالت تعادل به وسیله سری تیلور بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V + \dots \quad (30)$$

در رابطه فوق δV مجموع ترم‌های مرتبه اول و $\delta^2 V$ مجموع ترم‌های مرتبه دوم در بسط تیلور هستند. بنابر تعریف، δV اولین تغییرات V و $\delta^2 V$ دومین تغییرات V است. مطابق با معیار ترفتر²، شرط تعادل یک سیستم چند درجه آزادی، معادل صفر بودن اولین تغییرات V می‌باشد. همچنین شرط پایداری جسم در همسایگی تعادل، مثبت معین بودن دومین تغییرات V می‌باشد. بنابراین معیار، تعادل وقتی پایدار است که به ازای کلیه جابه‌جایی‌های مجازی $\delta^2 V > 0$ باشد. اگر به ازای حداقل یک مجموعه ممکن از جابه‌جایی‌های مجازی $\delta^2 V < 0$ باشد، حالت تعادل ناپایدار است. از شرط $\delta^2 V = 0$ برای به دست آوردن معادلات پایداری مسائل کمانش ورق‌ها استفاده می‌شود [23].

با اعمال معادلات اویلر بر دومین تغییرات انرژی پتانسیل کل، معادلات پایداری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{r1,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta1,\theta} + \frac{1}{r} (N_{r1} - N_{\theta1}) &= 0 \\ N_{r\theta1,r} + \frac{1}{r} N_{\theta1,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta1} &= 0 \\ (r.M_{r1})_{,rr} + 2M_{r\theta1,r} + \frac{1}{r} M_{\theta1,\theta\theta} &+ \end{aligned} \quad (31)$$

$$(r.w_{1,r}.N_{r0} + w_{1,\theta}.N_{r\theta0} - M_{\theta1})_{,r} + (\frac{1}{r}.w_{1,\theta}.N_{\theta0} + w_{1,r}.N_{r\theta0} + \frac{2}{r} M_{r\theta1})_{,\theta} = 0$$

1- Variational Method

2- Trefftz

$$\begin{aligned} N_{r0} &= A_5 \\ N_{\theta 0} &= A_5 \\ N_{r\theta 0} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

با توجه به پیوست (الف) داریم

$$A_5 = -\frac{\phi_m}{1-\nu_0} - e_{31} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{h}{2} \int E_z^l dz + \int E_z^u dz \\ \frac{h}{2} + h_p \\ -\frac{h}{2} - h_p \\ \frac{h}{2} \end{array} \right\} \quad (40)$$

با جایگذاری روابطه (20) در (40) نیروهای پیش کمانش به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} N_{r0} &= -\frac{\phi_m}{1-\nu_0} + e_{31}(V^u - V^l) \\ N_{\theta 0} &= -\frac{\phi_m}{1-\nu_0} + e_{31}(V^u - V^l) \\ N_{r\theta 0} &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

معادلات پایداری (31) با توجه به شرط تقارن بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{dN_{r1}}{dr} + \frac{N_{r1} - N_{\theta 1}}{r} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(r M_{r1}) + \frac{d}{dr}(r \frac{dw_1}{dr} N_{r0} - M_{\theta 1}) = 0$$

با قراردادن روابط (5) و (4) در روابط (22) و انجام عملیات ساده‌سازی، معادلات پایداری بر حسب تغییر مکان به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2} \right) + \\ A_3 \left(-\frac{d^3 w_1}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw_1}{dr} \right) = 0 \\ A_3 \left[-\frac{d^3 u_1}{dr^3} - \frac{2}{r} \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^3} \right] + \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} B_3 \left[\frac{d^4 w_1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_1}{dr} \right] \\ = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r N_{r0} \frac{dw_1}{dr}) \end{aligned}$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر و قرار دادن در رابطه اول (43) خواهیم داشت:

$$y = \frac{dw_1}{dr}, q = A_1 u_1 - A_3 \frac{dw_1}{dr} = A_1 u_1 - A_3 y \quad (44)$$

$$q'' + \frac{1}{r} q' - \frac{1}{r^2} q = 0 \quad (45)$$

که دارای جوابی به صورت زیر است:

متغیر $r = \frac{2z+h}{2h}$ ، معادله انتقال حرارت ورق FGM همراه با شرایط مرزی مربوطه به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{k k_{cm} r^{k-1}}{k_m + k_{cm} r^k} \frac{dT}{dr} = 0 \\ r=1 : T = T_c \\ r=0 : T = T_m \end{aligned} \quad (36)$$

معادله دیفرانسیل فوق حل تحلیلی ندارد و لذا از روش حل تقریبی به وسیله سری جهت یافتن درجه حرارت استفاده می‌شود. مطابق با این روش، جواب معادله به صورت یک سری توانی فرض می‌شود. استفاده از تعداد جملات بیشتر باعث بالا رفتن دقت حل می‌شود. با ارضای شرایط مرزی حرارتی، تابع توزیع درجه حرارت در راستای ضخامت به دست می‌آید [2]:

$$\begin{aligned} T(r) = T_m + r \Delta T \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{r^k k_{cm}}{k_m} \right)^n}{nk+1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^n}{nk+1} \end{aligned} \quad (37)$$

عبارت ϕ_m برای حالت بارگذاری مفروض با توجه به پیوست (الف) و رابطه (37) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_m = \Delta T h \\ \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{k_{cm}}{k_m} \right)^n}{nk+1} \left\{ \frac{E_m \alpha_m}{nk+2} + \frac{E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m}{(n+1)k+2} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{(n+2)k+2} \right\} \\ + T_m h \left\{ E_m \alpha_m + (E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m) \frac{1}{k+1} + \right. \\ \left. (E_{cm} \alpha_{cm}) \frac{1}{2k+1} \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

در ابتدا باید نیروهای پیش کمانش تعیین شوند. برای به دست آوردن نیروهای پیش کمانش از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم. برای حل معادلات تعادل از تئوری غشایی استفاده کرده و کلیه گشتاورها و دوران‌های قبل از کمانش را مساوی صفر قرار می‌دهیم. با انجام این کار نیروهای پیش کمانش به صورت زیر به دست خواهند آمد [24]:

$$y = \frac{C_3}{\lambda} J_1(\lambda r) + \frac{C_5}{r} \quad (56)$$

شرایط مرزی برای ورق با تکیه گاه‌های گیردار به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y &= \text{finite} & \text{at } r &= 0 \\ y &= 0 & \text{at } r &= a \end{aligned} \quad (57)$$

با اعمال شرایط فوق به دست خواهیم آورد:

$$\Rightarrow \lambda r = 3,831 \quad (58)$$

و با توجه به تعریف λ^2 داریم:

$$N_{r_0} = -\frac{14,68 D}{a^2} \quad (59)$$

N_{r_0} نیروی پیش کماتش در جهت r است. با جایگذاری روابط (38) و (41) در رابطه (59) رابطه زیر برای اختلاف دما به دست خواهد آمد:

$$\Delta T = \frac{1}{L_2} \left\{ \frac{14,68 D(1-\nu_0)}{ha^2} + \frac{e_{31}(V^u - V^l)(1-\nu_0)}{h} - L_1 \right\} \quad (60)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} L_1 &= T_m [E_m \alpha_m + \\ &\frac{1}{k+1} (E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m) + \frac{1}{2k+1} (E_{cm} \alpha_{cm})] \\ L_2 &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{k_{cm}}{k_m})^n}{nk+1} \left\{ \frac{E_m \alpha_m}{nk+2} + \frac{E_m \alpha_{cm} + E_{cm} \alpha_m}{(n+1)k+2} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{(n+2)k+2} \right\}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{k_{cm}}{k_m})^n}{nk+1}} \end{aligned} \quad (61)$$

به طور مشابه اختلاف دمای کماتش به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\Delta T = \frac{1}{L_2} \left\{ \frac{14,68 A_6 (A_1 B_3 - A_3^2) (1-\nu_0)}{h [A_1 A_6 a^2 - 14,68 (A_3^2 - A_1 B_3)]} + \frac{e_{31}(V^u - V^l)(1-\nu_0)}{h} - L_1 \right\} \quad (62)$$

5- بحث و بررسی

یک ورق دایره‌ای (Aluminum-Alumina) FGM با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک PZT-5H مطابق شکل (1) در نظر گرفته می‌شود. ورق دارای شرایط

$$q = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

در حالتی که تکیه گاه‌ها گیردار باشند داریم:

$$\begin{aligned} C_2 = 0 &\Rightarrow r = 0 \text{ در } \frac{dw_1}{dr} = \text{finite} \\ r = a &\Rightarrow C_1 = 0 \text{ در } \frac{dw_1}{dr} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

پس

$$q = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{A_3}{A_1} \frac{dw_1}{dr} \quad (47)$$

باجایگذاری رابطه (47) در رابطه دوم (43) و پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$D \nabla^4 w_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r N_{r_0} \frac{dw_1}{dr}) \quad (48)$$

که

$$D = B_3 - \frac{A_3^2}{A_1} \quad (49)$$

به منظور حل معادله (48) تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\beta = \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} \quad (50)$$

با جایگذاری داریم:

$$D(\beta'' + \frac{1}{r}\beta') = N_{r_0} \beta \quad (51)$$

با قرار دادن $\lambda^2 = -\frac{N_{r_0}}{D}$ در رابطه فوق به معادله بسل زیر خواهیم رسید:

$$r^2 \beta'' + r \beta' - \lambda^2 r^2 \beta = 0 \quad (52)$$

حل معادله فوق دارای جوابی به صورت زیر است.

$$\beta = C_3 J_0(\lambda r) + C_4 Y_0(\lambda r) \quad (53)$$

به طوری که $J_0(\lambda r)$ معرف تابع بسل نوع اول مرتبه صفر و $Y_0(\lambda r)$ معرف تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر است. می‌دانیم که گشتاور برای ورق دایره‌ای در حالت متقارن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_1}{dr} \quad (54)$$

پس می‌توان β را مؤلفه‌ای از گشتاور دانست. بنابراین باید در $r = 0$ مقداری محدود داشته باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_4 = 0 & \quad r = 0 \text{ at } \beta = \text{finite} \\ \Rightarrow \beta = \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r} y &= C_3 J_0(\lambda r) \end{aligned} \quad (55)$$

معادله (55) یک معادله کامل است که با حل آن خواهیم داشت:

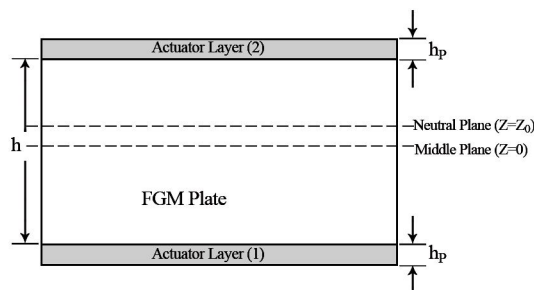
با توجه به اینکه مقادیر به دست آمده برای تئوری های ذکر شده اختلاف اندکی با هم دارند در اینجا تنها نمودارهای مربوط به تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات آورده شده‌اند و در جداول مربوطه این مقادیر با هم مقایسه شده‌اند. در شکل (2) مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک تحت افزایش درجه غیر خطی بر حسب مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی بر لایه های پیزوالکتریک با استفاده از رابطه (61) رسم گردیده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش بصورت خطی افزایش می‌یابد.

در شکل (3) مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش ورق FGM نمونه تحت افزایش درجه حرارت غیرخطی در جهت ضخامت حاصل از حل معادلات انتقال حرارت به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ($K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) بر حسب $\frac{h}{a}$ رسم شده است. در این حالت فرض شده تحلیل کمناش ورق مبتنی بر تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار اختلاف دمای بحرانی کمناش با افزایش $\frac{h}{a}$ یعنی ضخیم شدن ورق افزایش می‌یابد. میزان افزایش T_{cr} از $\frac{h}{a} = 0,02$ تا $\frac{h}{a} = 0,1$ شدید است و از $\frac{h}{a} = 0,01$ تا $\frac{h}{a} = 0,02$ نسبتاً ملایم و اندک است.

با افزایش ثابت توانی K مقدار اختلاف دمای بحرانی کمناش ورق کاهش یافته است. تفاوت بین مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش ورق همگن $K = 0$ ، با ورق FGM، با ترکیب خطی مؤلفه‌ها $K = 1$ زیاد است. در حالی که این تفاوت در ورق FGM با فرض مقادیر مختلف ثابت توانی به طور نسبی کمتر می‌باشد. به‌ویژه تفاوت بین مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش ورق FGM با ترکیب غیرخطی مؤلفه‌ها ($K > 2$) ناچیز است.

در شکل (4) مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک تحت افزایش درجه غیر خطی به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ($K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) بر حسب $\frac{h}{a}$ رسم شده است. در این جا نیز فرض شده تحلیل کمناش ورق مبتنی بر تئوری مرتبه اول تغییر شکل

مرزی گیردار بوده و مشخصات هندسی و خواص مادی ورق در پیوست (ج) آورده شده است [16].

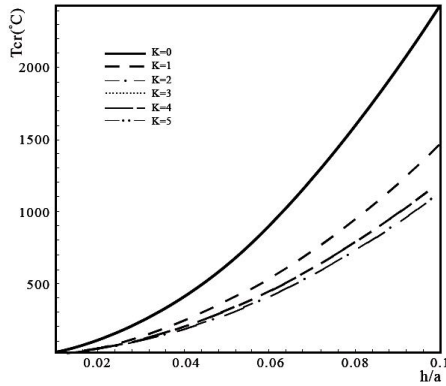


شکل (1) ورق دایره‌ای FGM با لایه های پیزوالکتریک.

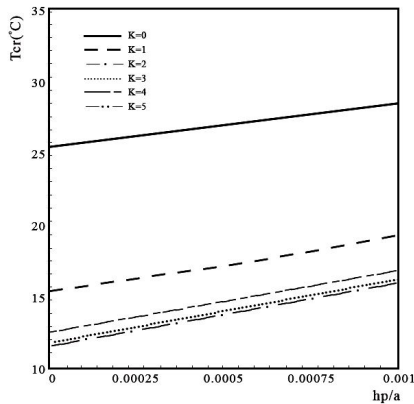
در این بخش ورق نمونه معرفی شده تحت بارگذاری حرارتی مفروض قرار گرفته است. بر اساس روابط به دست آمده اختلاف دمای بحرانی کمناش بر اساس تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول برشی صفحات، نمودارها و جداول ارائه شده است (کلیه مقادیر اختلاف دما در مقاله حاضر بر حسب درجه سانتیگراد است).

ابتدا مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش به دست آمده برای ورق نمونه مذکور با مقادیر به دست آمده در مرجع [11] مقایسه شده است. در این مرجع روابط بر مبنای صفحه میانی به دست آمده و نتایج برای ورق FGM یک لایه آورده شده است. ابتدا نتایج برای ورق FGM یک لایه با مرجع مذکور مقایسه و پس از اطمینان از درستی روش کار به بررسی نتایج برای ورق FGM با لایه های پیزوالکتریک پرداخته شده است. سپس برای حالات مختلف بارگذاری حرارتی مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمناش T_{cr} به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ($K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) بر حسب $\frac{h}{a}$ و $\frac{h_p}{a}$ به دست آمده‌اند. در همه حالات بارگذاری، ولتاژ برای لایه بالایی پیزوالکتریک 45 ولت و برای لایه پایینی 45- ولت در نظر گرفته می‌شود.

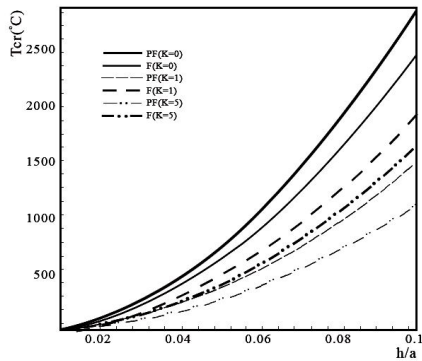
با انتخاب ثابت توانی معادل صفر ($K = 0$) ورق تبدیل به ورق همگن از جنس سرامیک شده و با انتخاب $K > 0$ یک ورق FGM در نظر گرفته می‌شود. $K = 1$ معرف فرض رابطه خطی برای ترکیب اجزا FGM (سرامیک - فلز) است. با فرض $K > 1$ رابطه توانی (غیر خطی) بر کلیه خواص مادی FGM حاکم است.



شکل (4) اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک. ($\frac{h_p}{a} = 0,0001$)



شکل (5) تاثیر ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک بر اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک ($\frac{h}{a} = 0,01$)



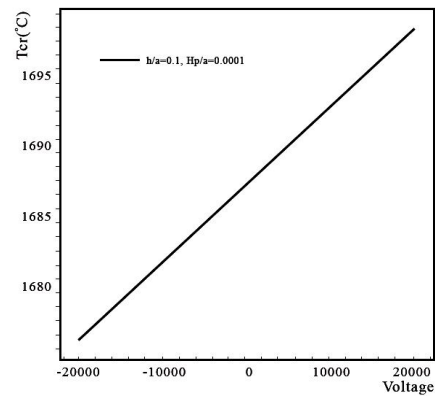
شکل (6) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM با لایه‌های محرک - محرک پیزوالکتریک با اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM ($\frac{h_p}{a} = 0,0001$)

در شکل (6)، PF نمودار مربوط به ورق پیزوالکتریک تحلیل شده به کمک تئوری مرتبه اول و F نمودار مربوط به

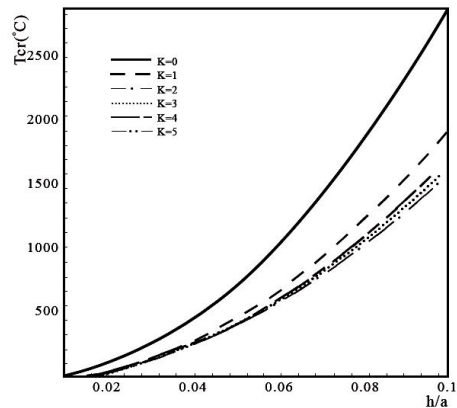
برشی صفحات است. رفتار کمانش ورق در این حالت‌ها نیز مشابه شکل (3) قابل تفسیر است.

در شکل (5) تاثیرات لایه‌های پیزوالکتریک بر مقدار اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی ($K = 0,1,2,3,4,5$) بر حسب $\frac{h_p}{a}$ طبق تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات ترسیم شده است. در شکل (6) به مقایسه تاثیر لایه‌های پیزوالکتریک بر اختلاف دمای بحرانی کمانش نسبت به حالتی که از اثرات پیزوالکتریک صرف نظر شده است پرداخته‌ایم. همانطور که مشاهده می‌شود لایه‌های پیزوالکتریک موجب افزایش اختلاف دمای بحرانی کمانش شده که این افزایش برای ورق همگن کمتر از افزایش اختلاف دما برای ورق ($K > 0$) FGM است.

رفتار کمانش ورق در حالت مبتنی بر تئوری کلاسیک صفحات همانند تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات قابل تفسیر است.



شکل (2) اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM بر حسب اختلاف پتانسیل لایه‌های پیزوالکتریک.



شکل (3) اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای FGM.

کمانش ورق FGM با لایه های محرک پیزوالکتریک بر حسب h/a و K مبتنی بر تئوری های کلاسیک (C) و مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F) ارائه شده است.

ورق FGM تحلیل شده به کمک تئوری مرتبه اول را مشخص می کنند. در جدول (1) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM به دست آمده در مقاله حاضر بر حسب h/a و K مبتنی بر تئوری های کلاسیک (C) و مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F)، با نتایج مرجع [11] ارائه شده است. در جدول (2) مقایسه اختلاف دمای بحرانی

جدول (1) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM در مقاله حاضر بر حسب h/a و K مبتنی بر تئوری کلاسیک (C) و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F)، با نتایج به دست آمده در مرجع [11].

CLPT($K=1$)	FSDT($K=1$)	CLPT($K=0.5$)	FSDT($K=0.5$)	CLPT($K=0$)	FSDT($K=0$)	h/a
۱۵,۳۷۹	۱۵,۳۹۵	۱۱۹,۰۰۴	۱۹,۰۱۶	۲۵,۴۳۳	۲۵,۴۳۹	مقاله حاضر 0/01
۱۵,۳۷۸	۱۵,۳۷۳	۱۱۹,۰۰۲	۱۸,۹۹۶	۲۵,۴۳۳	۲۵,۴۲۴	مرجع [۱۱]
۶۱,۵۱۹	۶۱,۴۴۵	۷۶,۰۱۶	۷۵,۹۱۱	۱۰۱,۷۳۲	۱۰۱,۵۶۲	مقاله حاضر 0/02
۶۱,۵۱۲	۶۱,۴۴۰	۷۶,۰۰۹	۷۵,۹۱۵	۱۰۱,۴۵۵	۱۰۱,۵۹۰	مرجع [۱۱]
۱۳۸,۴۱۸	۱۳۷,۹۵۷	۱۷۱,۰۳۶	۱۷۰,۴۲۶	۲۲۸,۸۹۸	۲۲۷,۹۷۰	مقاله حاضر 0/03
۱۳۸,۴۳۳	۱۳۸,۰۳۷	۱۷۱,۰۲۱	۱۷۰,۵۹۴	۲۲۸,۸۹۸	۲۲۸,۱۱۸	مرجع [۱۱]
۲۴۶,۰۷۷	۲۴۴,۵۷۹	۳۰۴,۰۶۴	۳۰۲,۱۰۰	۴۰۶,۹۳۰	۴۰۳,۹۶۸	مقاله حاضر 0/04
۲۴۶,۰۵۰	۲۴۴,۸۹۷	۳۰۴,۰۳۹	۳۰۲,۵۳۲	۴۰۵,۸۲۱	۴۰۴,۶۶۶	مرجع [۱۱]
۳۸۴,۴۹۵	۳۸۰,۸۲۲	۴۷۵,۱۰۰	۴۷۰,۲۹۵	۶۳۵,۸۲۸	۶۲۸,۶۰۲	مقاله حاضر 0/05
۳۸۴,۴۵۳	۳۸۱,۶۴۶	۴۷۵,۰۶۱	۴۷۱,۳۹۳	۶۳۵,۸۲۸	۶۳۰,۳۲۰	مرجع [۱۱]

جدول (2) مقایسه اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق FGM با لایه های محرک پیزوالکتریک بر حسب h/a و K مبتنی بر تئوری کلاسیک (C) و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات (F) ($\frac{h_p}{a} = 0,0001$).

$K=0$	$K=4$	$K=3$	$K=2$	$K=1$	$K=0$	h/a
۱۶,۲۵۹	۱۶,۲۴۹	۱۶,۳۴۵	۱۶,۸۹۷	۱۹,۳۱۴	۲۸,۵۴۸	C 0/01
۱۶,۲۵۰	۱۶,۲۴۰	۱۶,۳۳۶	۱۶,۸۸۹	۱۹,۳۰۵	۲۸,۵۳۴	F
۶۴,۹۶۶	۶۴,۹۲۶	۶۵,۳۱۰	۶۷,۵۲۳	۷۷,۱۹۲	۱۱۴,۱۴۱	C 0/02
۶۴,۸۱۱	۶۴,۷۷۸	۶۵,۱۷۲	۶۷,۳۹۱	۷۷,۰۵۰	۱۱۳,۹۱۳	F
۱۴۶,۱۴۳	۱۴۶,۰۵۵	۱۴۶,۹۱۹	۱۵۱,۸۹۹	۱۷۳,۶۵۵	۲۵۶,۷۹۶	C 0/03
۱۴۵,۳۶۳	۱۴۵,۳۱۵	۱۴۶,۲۲۳	۱۵۱,۲۳۵	۱۷۲,۹۴۰	۲۵۵,۶۴۶	F
۲۵۹,۷۹۱	۲۵۹,۶۳۵	۲۶۱,۱۷۲	۲۷۰,۰۲۵	۳۰۸,۷۰۵	۴۵۶,۵۱۳	C 0/04
۲۵۷,۳۳۶	۲۵۷,۳۰۴	۲۵۸,۹۸۱	۲۶۷,۹۳۵	۳۰۶,۴۵۰	۴۵۲,۸۹۱	F
۴۰۵,۹۱۱	۴۰۵,۶۶۷	۴۰۸,۰۶۹	۴۲۱,۹۰۲	۴۸۲,۳۳۹	۷۱۳,۲۹۱	C

h, h_p	ضخامت ورق FGM و لایه های پیزوالکتریک
K	اندیس قانون توانی
k_i	انحناءها
$K(z), K_c, K_m$	ضریب هدایت حرارتی FGM، سرامیک و فلز
N_i, M_i, Q_i	نیرو و گشتاور و نیروهای برشی متوجه
T	دما
	مؤلفه‌های جابه‌جایی u, v, w
z_0	محل صفحه خنثی فیزیکی
	مؤلفه‌های سیستم مختصات استوانه‌ای r, θ, z
$\alpha(z), \alpha_c, \alpha_m$	ضریب انبساط حرارتی FGM، سرامیک و فلز
	کرنش برشی $\varepsilon_{r\theta}$
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$	کرنش محوری
ρ	چگالی
ν_0	ضریب پواسون
ϕ	میدان پتانسیل در لایه‌های پیزوالکتریک
g_{ii}	ثابت دی الکتریک
e_{ii}	ضریب کرنش پیزوالکتریک
C_{ii}^p	مدول الاستیسیته ماده پیزوالکتریک
D_i	جابجایی الکتریکی
E_i	میدان الکتریکی
ΔT_{cr}	اختلاف دمای بحرانی کمانش

مراجع

- [۱] Koizumi.M. , Niino.M. , Miyamoto.Y, FGM research programs in Japan-from structural to Functional uses. Functionally Graded Materials, ۱۹۹۶-۱۹۹۷, pp ۱-۸.
- [۲] Samsam Shariat B.A., Eslami M.R., Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, *Composite Structures*, ۷۸, ۲۰۰۷, pp. ۴۳۳-۴۳۹.
- [۳] Zhong H., GuC., Buckling of symmetrical cross-ply composite rectangular plates under a linearly varying in-plane load, *Composite Structures*, ۸۰, ۲۰۰۷, pp. ۴۲-۴۸.

7- نتیجه گیری

با توجه به بخش قبل نتایج زیر قابل استخراج است:

- 1- مقادیر اختلاف دمای بحرانی توسط تئوری‌های کلاسیک و مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات، اختلاف بسیار اندکی با یکدیگر دارند و این اختلاف با افزایش نسبت $\frac{h}{a}$ بیشتر می‌شود.
- 2- در هر دو تئوری، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش مربوط به ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک از مقادیر مربوط به ورق همگن کمتر است.
- 3- لایه‌های پیزوالکتریک موجب افزایش اختلاف دمای بحرانی کمانش شده که این افزایش برای ورق همگن ($K = 0$) در هر دو حالت بارگذاری خطی و غیرخطی درجه حرارت کمتر از افزایش اختلاف دما برای ورق $FGM (K > 0)$ است. در هر دو تئوری، مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش مربوط به ورق FGM با لایه‌های پیزوالکتریک با افزایش نسبت $\frac{h}{a}$, $\frac{h_p}{a}$ افزایش می‌یابند.
- 4- مقادیر اختلاف دمای بحرانی کمانش با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه های پیزوالکتریک به صورت خطی افزایش می‌یابد.

فهرست علائم

a

شعاع ورق دایره‌ای

مدول الاستیسیته FGM، سرامیک و فلز $E(z), E_c, E_m$

- [۱۶] Aldraihem.O.J, Khdeir.A.A, Exact deflection solutions of Beams With Shear Piezoelectric Actuators, *International Journal of Solids and Structures*, ۴۰, ۱, ۲۰۰۳, pp. ۱-۱۲.
- [۱۷] Wang Z., Chen S.H., Han W., The Static Shape Control for Intelligent Structures, *Journal of Finite Element in Analysis and Design*, ۲۶, ۴, ۱۹۹۷, pp. ۳۰۳-۳۱۴.
- [۱۸] Robbins D.H., Reddy J.N., Analysis of a Piezoelectrically Actuated Beams using a Layer-Wise Displacement Theory, *Computers & Structures*, ۴۱, ۲, ۱۹۹۱, pp. ۲۶۵-۲۷۹.
- [۱۹] Morimoto T., Tanigawa Y., Kawamura R., Thermal Buckling of Functionally Graded Rectangular Plates Subjected to Partial Heating, *International Journal of Mechanical Sciences*, ۴۸, ۹, ۲۰۰۶, pp. ۹۲۶-۹۳۷.
- [۲۰] Viliani N.S., Khalili S.M.R., Porrostami H., Buckling Analysis of FG Plate with Smart Sensor/Actuator, *Journal of Solid Mechanical*, ۱, ۳, ۲۰۰۹, pp. ۲۰۱-۲۱۲.
- [۲۱] Lien. W.C., Chung. Y.L., Ching C.W., Dynamic Stability Analysis and Control of a Composite Beam with Piezoelectric Layers, *Composite Structures*, ۵۶, ۲۰۰۲, pp. ۹۷-۱۰۹.
- [۲۲] Halliday H., Resnick R., Walker J., *Fundamentals of Physics*, Wiley, New York, Extended Sixth Edition, ۲۰۰۰.
- [۲۳] Brush D.O., Almorh. B.O., *Buckling of Bars-Plate and shells*, McGraw Hill , New York, ۱۹۷۵.
- [۲۴] Meyers. C.A, Hyer. M.W., Thermal Buckling and Postbuckling of Symmetrically Laminated Composite Plates, *Journal of Thermal Stresses*, Colume, ۱۴, ۴, ۱۹۹۹, pp. ۵۱۹-۵۴۰.
- [۴] Batra. R.C, Wei Z., Dynamic buckling of a thin thermoviscoplastic rectangular plate, *Thin-Walled Structures*, ۴۳, ۲, ۲۰۰۵, pp. ۲۷۳-۲۹۰.
- [۵] Eslami M.R., Mossavarali A., Peydaye Saheli G., Thermoelastic buckling of Isotropic and Orthotropic Plates with Imperfections, *Journal Of Thermal Stresses*, ۲۳, ۹, ۲۰۰۰, pp. ۸۵۳-۸۷۲.
- [۶] Najafizadeh. M.M., Eslami.M.R., First-Order-Theory-Based Thermoelastic Stability of Functionally Graded Material Circular Plates, *AIAA Journal*, ۴۰, ۷, ۲۰۰۲, pp ۱۴۴۴-۱۴۵۰.
- [۷] Najafizadeh. M.M., Eslami M.R., Buckling Analysis of Circular Plates of Functionally Graded Materials under Uniform Radial compression, *International Journal of Mechanical Science*, Volume ۴۴, Issue ۱۲, ۲۰۰۲, pp. ۲۴۷۹-۲۴۹۳.
- [۸] Javaheri.R, Eslami.M.R, Thermal Bucking of Functionally Graded Plates, *AIAA Journal*, ۴۰, ۱, ۲۰۰۲, pp ۱۶۲-۱۶۹.
- [۹] Javaheri.R., Eslami M.R., Bucking of Functionally Graded Plates under in-plane Compressive Loading, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics*, ۸۲, ۴, ۲۰۰۲, pp. ۲۷۷-۲۸۳.
- [۱۰] Javaheri R., Eslami M.R., Thermal Bucking of Functionally Graded Plates Based on Higher Order Theory, *Journal of thermal Stresses*, ۲۵, ۷, ۲۰۰۲, pp. ۶۰۳-۶۲۵.
- [۱۱] Najafizadeh M.M., Heydari H.R., Thermal Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, ۲۳, ۶, ۲۰۰۴, pp. ۱۰۸۵-۱۱۰۰.
- [۱۲] Najafizadeh M.M., Heydari H.R., An Exact Solution For Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plates Theory Under Uniform Radial Compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, ۵۰, ۳, ۲۰۰۸, pp. ۶۰۳-۶۱۲.
- [۱۳] Ma L.S., Wang T.J., Nonlinear Bending and Post-buckling of a Functionally Graded Circular Plates under Mechanical and Thermal Loading, *International Journal of Solids and Structures*, ۴۰, ۱۳-۱۴, ۲۰۰۳, pp. ۳۳۱۱-۳۳۳۰.
- [۱۴] Tiersten. H.F., *Linear Piezoelectric Plate Vibration*, Plenum Press, Newyork, ۱۹۶۹.
- [۱۵] Reddy J.N., Phan N.D., Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory, *Journal Of Sound and Vibration*, ۹۸, ۲, ۱۹۸۵, pp. ۱۵۷-۱۷۰.

$$(A_1, A_2) = 2(C_{11}^P, C_{12}^P)h_P + \frac{E_1}{1-\nu_o^2}(1, \nu_o)$$

$$(A_3, A_4) = -2(C_{11}^P, C_{12}^P)h_P z_o$$

$$A_5 = -\frac{\phi_m}{1-\nu_o} - e_{31} \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} & \frac{h}{2} + h_P \\ \int E_z^l dz + \int E_z^u dz \\ -\frac{h}{2} - h_P & \frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

$$\phi_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [E(z) \alpha(z) T(z)] dz$$

$$(B_1, B_2) = (A_3, A_4)$$

$$(B_3, B_4) = 2(C_{11}^P, C_{12}^P) \left[\frac{(\frac{h}{2} + h_P)^3}{3} - \frac{(\frac{h}{2})^3}{3} + h_P z_o^2 \right] + \frac{E_3}{1-\nu_o^2}(1, \nu_o)$$

$$B_5 = -\frac{\phi_b}{1-\nu_o} - e_{31} \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} & \frac{h}{2} + h_P \\ \int E_z^l(z - z_o) dz + \int E_z^u(z - z_o) dz \\ -\frac{h}{2} - h_P & \frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

$$\phi_b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [E(z) \alpha(z) T(z) (z - z_o)] dz$$

$$z_o = \frac{E_2}{E_1}$$

$$E_1 = (E_m + \frac{E_{cm}}{k+1})h$$

$$E_2 = E_{cm}h^2 \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2(k+1)} \right)$$

$$E_3 = h \begin{pmatrix} E_m \left(\frac{h^2}{12} + z_o^2 \right) + E_{cm} \left(\frac{h^2}{k+3} - \frac{h^2}{k+2} + \right. \\ \left. \frac{h^2}{4(k+1)} + \frac{z_o^2}{k+1} - \frac{2hz_o}{k+2} + \frac{hz_o}{k+1} \right) \end{pmatrix}$$

معادلات تعادل به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

$$N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) = 0$$

$$N_{r\theta,r} + \frac{1}{r}N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r}N_{r\theta} = 0$$

$$\left(\frac{1}{r}.w_{,\theta}.N_{\theta} + w_{,r}.N_{r\theta}\right)_{,\theta} = 0 \quad (r.Q_r)_{,r} + Q_{\theta,\theta} + (r.w_{,r}.N_r + w_{,\theta}.N_{r\theta})_{,r} +$$

$$r.Q_r + M_{\theta} - (r.M_r)_{,r} - M_{r\theta,\theta} = 0$$

$$r.Q_{\theta} - M_{\theta} - (r.M_{r\theta})_{,r} - M_{\theta,\theta} = 0$$

معادلات پایداری به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

$$N_{r1,r} + \frac{1}{r}N_{r\theta1,\theta} + \frac{1}{r}(N_{r1} - N_{\theta1}) = 0$$

$$N_{r\theta1,r} + \frac{1}{r}N_{\theta1,\theta} + \frac{2}{r}N_{r\theta1} = 0$$

$$(r.Q_{r1})_{,r} + Q_{\theta1,\theta} + (r.w_{1,r}.N_{r\circ} + w_{1,\theta}.N_{r\theta\circ})_{,r} + \left(\frac{1}{r}.w_{1,\theta}.N_{\theta\circ} + w_{1,r}.N_{r\theta\circ}\right)_{,\theta} = 0$$

$$r.Q_{r1} + M_{\theta1} - (r.M_{r1})_{,r} - M_{r\theta1,\theta} = 0$$

$$r.Q_{\theta1} - M_{r\theta1} - (r.M_{r\theta1})_{,r} - M_{\theta1,\theta} = 0$$

ج

ν	h (m)	K (W/mK)	a (/°C)	E (GPa)	ورق FGM
0/3	5×10^{-3}	204	23×10^{-6}	70	Aluminum (فلز)
0/3	5×10^{-3}	10/4	$7/4 \times 10^{-6}$	380	Alumina (سرامیک)

C_{11}^P (GPa)	ν	E (GPa)	g_{33} (f.m ⁻¹)	e_{31}, e_{32} (C.b/m)	C_{44}^P	C_{12}^P	پیزوالکتریک
126×10^9	0/3	65	$1/3 \times 10^{-8}$	-6/5	126×10^9	79×10^9	PZT-5