

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای دو سر گیردار FGM با رینگ تقویت شده بر اساس مدل ردی

محمد رضا عیسوند زیبائی*^۱

مهدی سلمان زاده^۲

سید رسول موسوی فر^۳

* نویسنده مسئول: isvandzibaei@iauandimeshk.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد FGM (تابعی) با رینگ تقویت شده که ترکیبی از فولاد ضد زنگ و نیکل می باشد پرداخته می شود. خصوصیات مواد در جهت ضخامت پوسته مطابق قانون توزیع کسر حجمی تغییر می کنند. در این مطالعه پوسته‌های استوانه‌ای رینگ تقویت شده دارند و این رینگها به طور اختیاری در طول قرار دارند. این مطالعه بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی پوسته انجام شده است و استخراج معادلات حرکت این پوسته استوانه‌ای FGM بر اساس اصل همپلتون انجام شده است. نتایج ارائه شده در این تحقیق شامل فرکانسهای طبیعی، اثر رفتار کسر حجمی، اثر موقعیت رینگ تقویت شده روی پوسته و اثر شرایط مرزی گیردار-گیردار روی فرکانسهای طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات مواد تابعی، پوسته استوانه‌ای، رینگ، اصل همپلتون.

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اندیمشک.

۲- عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر.

۳- عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد ایذه.

۱- مقدمه

به دلیل کاربردهای وسیع پوسته‌های استوانه‌ای در طراحی سازه‌های دریایی، ساختمانی، هوایی و غیره، تحقیقات انجام شده در این زمینه فراوان است که هر کدام با توجه به نوع تحلیل و روش حل از یکدیگر متمایز می‌شوند. انتخاب زمینه تحقیق با توجه به کاربرد آن در موارد مختلف صنعتی، نظامی، پزشکی و غیره است. این زمینه‌ها شامل حالت‌های مختلف بارگذاری، شرایط مختلف تکیه گاهی یا مقاوم‌سازی پوسته‌ها و یا پایداری آنها در مقابل عوامل گوناگون بوده است. در سالهای اخیر تحقیقات متعددی بر روی مواد تابعی انجام شده است. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای دارند. مواد تابعی موادی جدید با زیر ساختار غیرهمگن هستند که خواص مکانیکی آن به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح تا سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. نوع رایج مواد تابعی از ترکیب سرامیک و فلز حاصل می‌شود. نسبت این ترکیب در راستای ضخامت متغیر بوده و چگالی ذرات فلز معلق در بستر سرامیک از سطح فلزی تا سطح سرامیکی توسط یک تابع معین، که می‌تواند خطی یا غیر خطی باشد، تغییر می‌یابد. از کاربردهای مهندسی این مواد می‌توان به استفاده در موتور توربینها، ابزارها، آب بندی‌های مقاوم در برابر حرارت، سایش و ساخت سازه‌های صنایع هوایی، فضایی و دریایی نام برد. مقالات متعددی به بحث در مورد ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای شکل پرداخته‌اند. ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپ با رینگ توسط لوی و لم [۱] بحث شده است. حل دقیق ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با تقویت کننده‌های رینگ میانی بر اساس تئوری کلاسیک توسط زیانگ و همکاران [۲] مورد بررسی قرار گرفته شد. ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای تابعی با سطح مقطع بیضوی توسط پاتل و همکاران مورد بررسی قرار گرفت [۳]. ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی توسط لوی و همکاران مورد بحث قرار

گرفت [۴]. ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی در محیط مایع توسط چن و همکاران [۵] و ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مختلف تکیه‌گاهی توسط پراندهام و همکاران [۶] مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. تحقیقات انجام شده شامل موضوعاتی مانند تنش‌های حرارتی توسط لیو و همکاران [۷] بارگذاری پیچشی توسط سوفیگر و همکاران [۸] و تحلیل الاستیک توسط ردی و همکاران [۹] انجام شده است. همچنین تحقیقاتی در زمینه مواد تابعی با توجه به خصوصیات فرکانسها، ناشی از ارتعاشات توسط نعیم و همکاران [۱۰] و مومناز و همکاران [۱۱] صورت پذیرفت. در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه ساخته شده از مواد FGM با یک رینگ تقویت شده تحت تکیه گاههای گیردار-گیردار بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی مطابق مدل ردی پرداخته می‌شود.

۲- مواد تابعی

برای یک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی خصوصیات مواد مانند مدول الاستیسیته E ، ضریب پواسون ν و چگالی ρ به صورت تابعی از رفتار کسر حجمی فرض می‌شوند. در این روابط با توجه به اینکه جنس پوسته از دو ماده است. اندیس یک مربوط به جنس ماده اول (فولاد ضد زنگ) و اندیس دوم مربوط به جنس ماده دوم نیکل است [۱۲].

$$E = (E_1 - E_2) \left(\frac{\nu Z + h}{2h} \right)^N + E_2 \quad (1)$$

$$\nu = (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{\nu Z + h}{2h} \right)^N + \nu_2 \quad (2)$$

$$\rho = (\rho_1 - \rho_2) \left(\frac{\nu Z + h}{2h} \right)^N + \rho_2 \quad (3)$$

۳- روابط کرنش-جابجایی

روابط کرنش-جابجایی برای یک پوسته نازک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۳].

برشی مطابق با مدل ردی به صورت زیر انتخاب می شود [۱۳].

از طرفی چون تنش های برشی $\varepsilon_{۲۳}$ و $\varepsilon_{۱۳}$ در دو سطح مرزی $Z = \pm \frac{h}{۲}$ صفر می باشد. میدان جابه جایی به صورت زیر در می آید.

$$\begin{cases} U_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 \cdot \phi_1(\alpha_1, \alpha_2) - C_1 \cdot \alpha_2^2 \left(-\frac{u_1}{R_1} + \phi_1 + \frac{\partial u_2}{A_1 \partial \alpha_1} \right) \\ U_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 \cdot \phi_2(\alpha_1, \alpha_2) - C_1 \cdot \alpha_2^2 \left(-\frac{u_2}{R_2} + \phi_2 + \frac{\partial u_2}{A_2 \partial \alpha_2} \right) \\ U_3 = u_3(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$$

که در آن $C_1 = \frac{F}{3h^2}$ می باشد. با قرار دادن معادله (۱۱) در روابط (۴) تا (۹) روابط کرنش - جابه جایی به صورت ماتریسی به صورت زیر در می آید:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{۱۱} \\ \varepsilon_{۲۲} \\ \varepsilon_{۱۲} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{۱۱}^0 \\ \varepsilon_{۲۲}^0 \\ \varepsilon_{۱۲}^0 \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} k_{۱۱} \\ k_{۲۲} \\ k_{۱۲} \end{Bmatrix} + \alpha_2^2 \begin{Bmatrix} k'_{۱۱} \\ k'_{۲۲} \\ k'_{۱۲} \end{Bmatrix} \quad (۱۲)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{۱۳} \\ \varepsilon_{۲۳} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{۱۳}^0 \\ \gamma_{۲۳}^0 \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} \gamma_{۱۳}^1 \\ \gamma_{۲۳}^1 \end{Bmatrix} + \alpha_2^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{۱۳}^2 \\ \gamma_{۲۳}^2 \end{Bmatrix} \quad (۱۳)$$

که در آن؛

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{۱۱}^0 \\ \varepsilon_{۲۲}^0 \\ \varepsilon_{۱۲}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1} \right) \\ \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2} \right) \\ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \end{Bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{۱۱} \\ k_{۲۲} \\ k_{۱۲} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\phi_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) \\ \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\phi_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \\ \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\phi_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\phi_1}{A_1} \right) \right) \end{Bmatrix} \quad (۱۵)$$

$$\varepsilon_{۱۱} = \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_1} \right)} \left[\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + U_3 \frac{A_1}{R_1} \right] \quad (۴)$$

$$\varepsilon_{۲۲} = \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \right)} \left[\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + U_3 \frac{A_2}{R_2} \right] \quad (۵)$$

$$\varepsilon_{۳۳} = \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3} \quad (۶)$$

$$\varepsilon_{۱۲} = \frac{A_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_1} \right)}{A_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \right)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(-\frac{U_1}{A_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_1} \right)} \right) + \frac{A_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \right)}{A_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_1} \right)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(-\frac{U_2}{A_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \right)} \right) \quad (۷)$$

$$\varepsilon_{۱۳} = A_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_1} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(-\frac{U_1}{A_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_1} \right)} \right) + \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_1} \right)} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} \quad (۸)$$

$$\varepsilon_{۲۳} = A_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(-\frac{U_2}{A_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \right)} \right) + \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \right)} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} \quad (۹)$$

$$\begin{cases} U_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 \cdot \phi_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2^2 \cdot \psi_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2^3 \cdot \beta_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ U_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 \cdot \phi_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2^2 \cdot \psi_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2^3 \cdot \beta_2(\alpha_1, \alpha_2) \\ U_3 = u_3(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases} \quad (۱۰)$$

در این روابط A_1 و A_2 پارامترهای لامه، U_1 ، U_2 و U_3 میدان جابه جایی در جهات $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ، R_1 و R_2 شعاعهای پوسته می باشند. تئوری مرتبه سوم تغییر شکل

روابط تنش- کرنش برای یک پوسته نازک به صورت زیر

(۱۶)

می باشد:

(۲۰)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_{55} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix}$$

که در آن ؛

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{و} \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (21)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (22)$$

برای به دست آوردن روابط نیروهای برآیند تعاریف زیر را در نظر می گیریم:

(۲۳)

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1, \alpha_r, \alpha_r^2, \alpha_r^3, \alpha_r^4, \alpha_r^5, \alpha_r^6\} d\alpha_r$$

که A_{ij} نشانگر مؤلفه‌های ماتریس سفتی کششی، D_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی خمشی، B_{ij} سفتی‌های کوبله خمشی- کششی و H_{ij} و F_{ij} و E_{ij} سفتی‌های درجه بالا می‌باشند. A_{ij} و D_{ij} و F_{ij} برای $i, j = 1, 2, 4, 5, 6$ می‌باشند. در حالیکه E_{ij} و B_{ij} و G_{ij} و H_{ij} فقط برای $i, j = 1$ تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} d\alpha_r, \quad \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \alpha_r d\alpha_r \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{22} \\ R_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \alpha_r^2 d\alpha_r, \quad \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \alpha_r^2 d\alpha_r \quad (25)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{12} \\ Q_{22} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} d\alpha_r, \quad \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \alpha_r^2 d\alpha_r \quad (26)$$

$$\begin{Bmatrix} k'_{11} \\ k'_{22} \\ k'_{12} \end{Bmatrix} = -C_1 \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{A_1} \left(-\frac{\partial u_1}{R_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial^2 u_r}{A_1 \partial \alpha_1^2} - \frac{\partial A_1}{A_1} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_1 A_r} \left(-\frac{u_r}{R_r} + \phi_r + \frac{\partial u_r}{A_r \partial \alpha_r} \right) \right) \\ \left(\frac{1}{A_r} \left(-\frac{\partial u_r}{R_r \partial \alpha_r} + \frac{\partial \phi_r}{\partial \alpha_r} + \frac{\partial^2 u_r}{A_r \partial \alpha_r^2} - \frac{\partial A_r}{A_r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_r} \right) + \frac{\partial A_r}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1 A_r} \left(-\frac{u_1}{R_1} + \phi_1 + \frac{\partial u_r}{A_1 \partial \alpha_1} \right) \right) \\ \left(\frac{A_r}{A_1} \left(-\frac{\partial}{R_r \partial \alpha_1} \left(\frac{u_r}{A_r} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\phi_r}{A_r} \right) + \frac{1}{A_r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_r} - \frac{1}{A_r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_r} \right) + \frac{A_1}{A_r} \left(-\frac{\partial}{R_1 \partial \alpha_r} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left(\frac{\phi_1}{A_1} \right) + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_r} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_1} \right) \right) \end{Bmatrix}$$

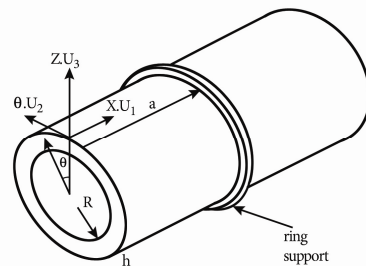
$$\begin{Bmatrix} \dot{\gamma}_{12} \\ \dot{\gamma}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\phi_1 - \frac{u_1}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_1} \right) \\ \left(\phi_r - \frac{u_r}{R_r} + \frac{1}{A_r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha_r} \right) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{12}^2 \\ \gamma_{23}^2 \end{Bmatrix} = 3C_1 \begin{Bmatrix} \left(-\frac{u_1}{R_1} + \phi_1 + \frac{\partial u_r}{A_1 \partial \alpha_1} \right) \\ \left(-\frac{u_r}{R_r} + \phi_r + \frac{\partial u_r}{A_r \partial \alpha_r} \right) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{12}^3 \\ \gamma_{23}^3 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} \left(-\frac{u_1}{R_1} + \phi_1 + \frac{\partial u_r}{A_1 \partial \alpha_1} \right) \\ R_1 \\ \left(-\frac{u_r}{R_r} + \phi_r + \frac{\partial u_r}{A_r \partial \alpha_r} \right) \\ R_r \end{Bmatrix} \quad (19)$$

۴- روابط تنش-کرنش

یک پوسته استوانه‌ای FGM به طول L شعاع R ، ضخامت h و یک رینگ تقویت شده از جنس تابعی مطابق شکل (۱) در نظر می‌گیریم. سطح مرجع در وسط پوسته استوانه‌ای انتخاب می‌شود، همچنین a موقعیت رینگ در طول پوسته است.



شکل (۱) هندسه یک پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت شده

۶- معادلات حرکت برای ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای

برای یک پوسته استوانه‌ای (در مختصات استوانه‌ای) داریم:

$$R_r = a, \quad \frac{1}{R} = 0, \quad A_r = a, \quad A_\theta = 0, \quad (38)$$

$$\alpha_r = \alpha_r, \quad \alpha_\theta = \theta, \quad \alpha_z = x$$

با جایگذاری معادله (۳۸) در معادلات (۳۲) تا (۳۶) معادلات حرکت برای ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a \frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{1r}}{\partial \theta} = I_o \ddot{u}_1 + (I_1 - C_1 I_r) \ddot{\phi}_1 - C_1 I_r \frac{\partial \ddot{u}_r}{\partial x} \quad (39)$$

$$\frac{\partial N_{rr}}{\partial \theta} + C_1 \frac{\partial P_{1r}}{\partial x} + Q_{1r} - 3C_1 R_{1r} + C_1 P_{1r} =$$

$$(I_1 + 2 \frac{C_1}{a} I_r + \frac{C_1^2}{a^2} I_\theta) \ddot{u}_r + \quad (40)$$

$$(I_1 - C_1 I_r + \frac{C_1}{a} I_\theta - \frac{C_1^2}{a^2} I_\theta) \ddot{\phi}_1 - (\frac{C_1}{a} I_r - \frac{C_1^2}{a^2} I_\theta) \frac{\partial \ddot{u}_r}{\partial \theta}$$

$$- C_1 a \frac{\partial^2 P_{11}}{\partial x^2} + N_{1r} - \frac{C_1}{a} \frac{\partial^2 P_{1r}}{\partial \theta^2} - 2C_1 \frac{\partial^2 P_{1r}}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial Q_{1r}}{\partial x}$$

$$+ 3C_1 a \frac{\partial R_{1r}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{1r}}{\partial \theta} + 3C_1 \frac{\partial R_{1r}}{\partial \theta} - \frac{C_1}{a} \frac{\partial P_{1r}}{\partial \theta} =$$

$$- C_1 I_r \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{C_1}{a} I_r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + (-C_1 I_\theta + C_1^2 I_\theta) \frac{\partial \ddot{\phi}_1}{\partial x} +$$

$$(-\frac{C_1}{a} I_\theta + \frac{C_1^2}{a^2} I_\theta) \frac{\partial \ddot{\phi}_1}{\partial \theta} - \frac{C_1^2}{a^2} I_\theta \frac{\partial \ddot{u}_r}{\partial \theta} \quad (41)$$

$$+ C_1^2 I_\theta \frac{\partial^2 \ddot{u}_r}{\partial x^2} + \frac{C_1^2}{a} I_\theta \frac{\partial^2 \ddot{u}_r}{\partial \theta^2} - \ddot{u}_r I_o$$

$$- a \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + C_1 a \frac{\partial P_{11}}{\partial x} - \frac{\partial M_{1r}}{\partial \theta} + C_1 \frac{\partial P_{1r}}{\partial \theta} - 3C_1 R_{1r} a$$

$$+ a Q_{1r} = -I_1 \ddot{u}_1 + C_1 I_r \ddot{u}_1 +$$

$$(-I_r + 2C_1 I_\theta - C_1^2 I_\theta) \ddot{\phi}_1 + (C_1 I_\theta - C_1^2 I_\theta) \frac{\partial \ddot{u}_r}{\partial x} \quad (42)$$

۵- معادلات حرکت برای ارتعاشات یک پوسته عام

معادلات حرکت برای ارتعاشات یک پوسته عام را می

توان با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - K) dt = 0, \quad \Pi = U - V \quad (27)$$

که در آن U, K و V انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی کرنشی بارهای خارجی وارد بر پوسته که انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و بارهای وارد بر پوسته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K = \frac{1}{2} \int \int \int \rho (\dot{U}_1^2 + \dot{U}_r^2 + \dot{U}_\theta^2) dV \quad (28)$$

$$\quad (29)$$

$$U = \int \int \int (\sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{rr} \epsilon_{rr} + \sigma_{1r} \epsilon_{1r} + \sigma_{1\theta} \epsilon_{1\theta} + \sigma_{r\theta} \epsilon_{r\theta}) dV$$

$$\quad (30)$$

$$V = \int \int (q_1 \delta U_1 + q_r \delta U_r + q_\theta \delta U_\theta) A_1 A_r d\alpha_1 d\alpha_r$$

که در آنها حجم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dV = A_1 A_r d\alpha_1 d\alpha_r d\alpha_\theta \quad (31)$$

با استفاده از معادلات (۱۰) تا (۱۹) و جایگذاری آن در معادله (۲۷) معادلات حرکت برای پوسته عام به صورت زیر به دست می‌آیند که جملات این معادلات در پیوست آمده است.

$$\text{معادله A (پیوست)} \quad (32)$$

$$\text{معادله B (پیوست)} \quad (33)$$

$$\text{معادله C (پیوست)} \quad (34)$$

$$\text{معادله D (پیوست)} \quad (35)$$

$$\text{معادله E (پیوست)} \quad (36)$$

برای معادلات (۳۲) تا (۳۶) تعریف می‌کنیم:

$$I_i = \int_{-h}^h \rho \alpha_i^i d\alpha_i \quad (37)$$

$$\phi(0) = \phi'(L) = 0 \quad (46)$$

با جایگذاری معادله (44) در معادلات (39) تا (43) می‌توانیم معادلات حرکت این پوسته استوانه‌ای FGM را به فرم ماتریسی درآورد:

$$[C] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 [M] \begin{Bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \\ \bar{D} \\ \bar{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

در نهایت با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب به صورت

زیر خواهیم داشت:

$$\det(C_{ij} - M_{ij} \omega^2) = 0 \quad (48)$$

با بسط دادن دترمینان ضرایب بر حسب ω بدست می‌آیند:

$$\beta_0 \omega^6 + \beta_1 \omega^4 + \beta_2 \omega^2 + \beta_3 = 0 \quad (49)$$

با حل این معادله ده ریشه برای این استوانه‌ای FGM

به‌دست می‌آوریم، پنج ریشه مثبت و پنج ریشه منفی که ریشه‌های منفی غیر قابل قبول هستند و از پنج ریشه مثبت کوچکترین ریشه فرکانس طبیعی مورد مطالعه در این تحقیق است. پوسته استوانه‌ای FGM مورد بررسی شده در این تحقیق تشکیل شده از نیکل در سطح داخلی و فولاد ضد زنگ در سطح خارجی پوسته است. خصوصیات مواد برای نیکل و فولاد ضد زنگ در دمای $T = 300K$ مطابق جدول (1) در نظر گرفته می‌شود.

جدول (1) خصوصیات مواد [14]

نیکل			فولاد ضد زنگ			ضرایب
ρ	V	E	ρ	V	E	
8900	0.310	211.0	8166	0.3262	211.0	P_0
0	0	0	0	0	0	P_{-1}
0	0	-2.784×10^{-4}	0	-2.02×10^{-4}	3.079×10^{-4}	P_1
0	0	-3.797×10^{-9}	0	3.797×10^{-7}	-6.544×10^{-7}	P_2
0	0	0	0	0	0	P_3

$$-\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - C_1 \frac{\partial P_{22}}{\partial \theta} - a \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + C_1 a \frac{\partial P_{12}}{\partial x} - 3C_1 R_{23} a + a Q_{23} + C_1 R_{23} = (-I_1 C_1 I_3 - \frac{C_1}{a} I_4) \ddot{u}_2 + (-I_2 + 2C_1 I_4) \ddot{\phi}_2 - \frac{C_1}{a} I_4 \frac{\partial \ddot{u}_3}{\partial \theta} \quad (43)$$

۷- تحلیل معادلات پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت شده

میدان جابه‌جایی برای این پوسته استوانه‌ای FGM که شرایط مرزی مسئله را ارضا کند به صورت زیر تعریف می‌شود [1] و [12].

$$(44)$$

$$u_1 = \bar{A} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t)$$

$$u_2 = \bar{B} \phi(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t)$$

$$u_3 = \bar{C} \phi(x) \prod_{i=1}^N (x - a_i)^{\xi_i} \cos(n\theta) \cos(\omega t)$$

$$\phi_1 = \bar{D} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t)$$

$$\phi_2 = \bar{E} \phi(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t)$$

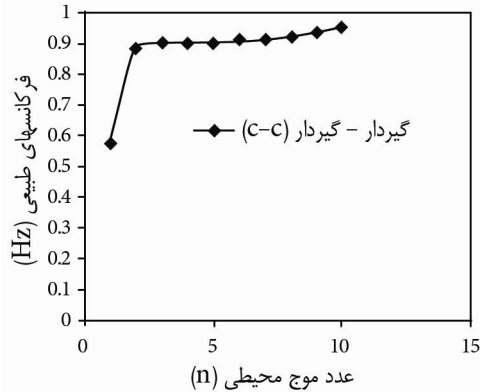
که در آنها $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}$ ثابتهایی هستند که دامنه ارتعاشات در جهات x, θ, z را نشان می‌دهند. $\phi(x)$ تابع خطی است که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کند. a_i موقعیت رینگ i ام را نشان می‌دهد و ξ_i پارامتری است که وقتی رینگ وجود داشته باشد، مقدار یک و وقتی رینگ موجود نیست، مقدار صفر را به خود می‌گیرد. n تعداد مودهای در جهت محیطی را نشان می‌دهد و ω فرکانس طبیعی ارتعاش می‌باشد. تابع محوری $\phi(x)$ نیز مانند تابع محوری برای تیر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi(x) = \gamma_1 \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \gamma_2 \cos\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) - \xi_m \times (\gamma_3 \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \gamma_4 \sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right)) \quad (45)$$

شرایط مرزی گیردار-گیردار برای این پوسته استوانه‌ای

به صورت زیر تعریف می‌شود:

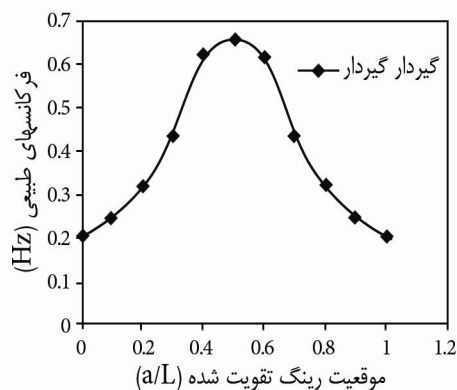
افزایش می‌یابند. این رفتار فرکانسها نشان می‌دهد که کمترین فرکانسها برای یک پوسته استوانه‌ای FGM با یک رینگ تقویت شده در $n=1$ اتفاق می‌افتد.



شکل (۲) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت شده

$$(m=1, h/R=0.01, l/R=20, a/L=0.3)$$

شکل (۳) تغییرات فرکانسهای طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM با موقعیت یک رینگ تقویت شده را نشان می‌دهد. موقعیت رینگ تقویت شده در طول پوسته مهم است و روی فرکانسها طبیعی پوسته اثر می‌گذارد و این اثر با توجه به نوع تکیه گاه انتخاب شده تغییر می‌کند. برای این پوسته استوانه‌ای FGM با یک رینگ تقویت شده و با شرایط تکیه گاهی هر دو لبه یکسان مثل شرایط مرزی گیردار-گیردار منحنی فرکانسهای طبیعی حول مرکز پوسته متقارن هستند.



شکل (۳) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت شده در موقعیت a/L

$$m=1, h/R=0.01, l/R=20, n=1$$

در این جدول خواص مواد FGM می‌تواند به صورت تابعی از دما باشد، خواص P برای مواد FGM به صورت زیر است:

$$P = P_0 (P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (50)$$

که $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ ضرایب دمایی بر حسب کلون هستند.

۸- بحث درباره نتایج

در این مقاله به منظور آگاهی از صحت و درستی جوابهای به دست آمده، نتایج با دیگر تحقیقات که از تئوری کلاسیک استفاده کرده اند مطابق با جدول (۲) بررسی و مقایسه شده است که در این جدول N عدد موج محیطی و m عدد موج طولی می‌باشد.

جدول (۲) مقایسه فرکانسهای طبیعی برای یک پوسته استوانه‌ای FGM

$$L=20.3 \text{ cm}, R=5.8 \text{ cm}, h=0.25 \text{ cm}, E=2.07788 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$$

$$\nu=0.217756 \quad \rho=8166 \text{ kg m}^{-3}$$

مطالعه فعلی	لوی	واریاتن	m	N
۲۰۴۳/۶	۲۰۴۳/۸	۲۰۴۶/۸	۱	۲
۵۶۳۵/۲	۵۶۳۵/۴	۵۳۷/۶	۲	
۸۹۳۲/۱	۸۲۳۵/۳	۸۹۳۵/۳	۳	
۱۱۴۰۷/۲	۱۱۴۰۷/۵	۱۱۴۰۵	۴	
۱۳۲۵۲/۸	۱۳۲۵۲/۳	۱۳۲۴۵	۵	
۲۱۹۵/۰	۱۴۷۹/۰	۱۴۷۷۵	۶	
۴۰۳۵/۳	۲۱۹۵/۱	۲۱۹۹/۳	۱	
۶۶۱۴/۳	۴۰۳۵/۵	۴۰۴۱/۳	۲	
۳۱۲۰/۷	۶۶۱۴/۶	۶۶۲۰/۰	۳	
۳۱۲۰/۷	۹۱۲۱/۰	۹۱۲۴/۰	۴	
۱۱۳۵۸/۷	۱۱۳۵۹/۰	۱۱۳۵۷	۵	
۱۳۳۹۲/۱	۱۳۳۹۲/۳	۱۳۳۸۵	۶	

در این تحقیق مطالعه بر روی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت شده ارائه شد. شرایط مرزی انتخاب شده در این تحقیق گیردار-گیردار (C-C) انتخاب شد. در شکل (۲) تغییرات فرکانسهای طبیعی با عدد موج محیطی n برای یک پوسته استوانه‌ای FGM با یک رینگ تقویت شده در موقعیت $a=0.3L$ نشان داده شده است. در این شکل فرکانسهای طبیعی پوسته با عدد موج محیطی n افزایش می‌یابند. این افزایش فرکانسها بیشتر مهم است زمانی که n افزایش می‌یابد از یک تا دو و برای n های بیشتر از دو فرکانسها با عدد موج محیطی n بتدریج

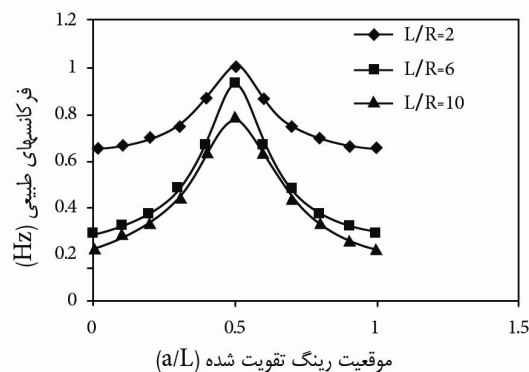
۹- نتیجه‌گیری

در این تحقیق مطالعه روی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای با رینگ ساخته شده از مواد FGM متشکل از فولاد ضدزنگ و نیکل ارائه شد. خصوصیات مواد در جهت ضخامت پوسته مطابق با قانون توزیع کسر حجمی تغییر می‌کنند. تحقیق بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی صورت و تحلیل بر اساس اصل همیلتون انجام پذیرفت. نوع تکیه‌گاههای انتخاب شده در این تحقیق گیردار-گیردار (C-C) می‌باشند. مطالعه نشان می‌دهد در حالتی که یک رینگ در موقعیت دلخواه روی پوسته قرار گیرد در شرایط مرزی گیردار-گیردار با افزایش تعداد موجهای محیطی n ، فرکانسها افزایش می‌یابد. پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط مرزی یکسان مثل شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C) هنگامی که رینگ در وسط پوسته قرار گیرد فرکانس بیشترین مقدار را خواهد داشت و منحنی فرکانس اصلی حول مرکز پوسته متقارن است.

فهرست علائم

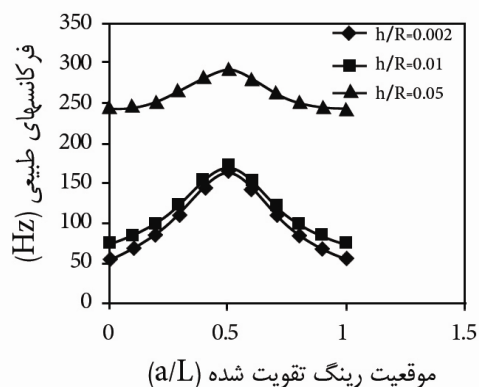
E	مدول الاستیسیته
ν	ضریب پواسون
ρ	چگالی
R	شعاع پوسته
L	طول پوسته
h	ضخامت پوسته
a	موقعیت رینگ
U_3, U_2, U_1	جابه‌جاییهای پوسته
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$	اجزای تنش
$\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}$	اجزای کرنش
N_{11}, N_{22}, N_{12}	منتجه‌های نیرو
A_1, A_2	پارامترهای لامه
n, m	اعداد موج
P, P_i	خواص مواد
ω	فرکانس طبیعی

شکل (۴) تغییرات فرکانسهای طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM با موقعیت یک رینگ تقویت شده a/L در نسبتهای مختلف طول به شعاع L/R را نشان می‌دهد. شکل نشان می‌دهد که نسبتهای مختلف طول به شعاع روی فرکانسهای طبیعی پوسته اثر می‌گذارند.



شکل (۴) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت در نسبتهای مختلف طول به شعاع L/R ($m=1, h/R=0.01, n=1$)

شکل (۵) تغییرات فرکانسهای طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM با یک رینگ تقویت شده a/L در نسبتهای مختلف ضخامت به شعاع h/R را نشان می‌دهد. شکل نشان می‌دهد که نسبتهای مختلف ضخامت به شعاع روی فرکانسهای طبیعی پوسته اثر می‌گذارند و اینکه فرکانسها افزایش در نسبتهای بزرگ ضخامت به شعاع افزایش می‌یابند.



شکل (۵) تغییرات فرکانسهای طبیعی یک پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت در نسبتهای مختلف ضخامت به شعاع h/R ($m=1, L/R=20, n=10$)

مراجع

- [12] Najafizadeh M.M., Isvandzibaei M.R., Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support. *Acta Mechanica*, Vol 191, 2007, pp. 75-91.
- [13] Soedel W., Vibration of shells and plates, Marcel Dekker, INC, New York, USA, 1981.
- [14] Warburton G. B., Vibration of thin cylindrical shells, *J. Mechanical Engineering Science*, Vol. 7, 1965, pp. 399-407.
- [15] Loy, C.T. Lam, K.Y. Reddy J.N., Vibration of functionally graded cylindrical shells. *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 41, 1999, pp. 309-324.
- [1] Loy C.T., Lam, K.Y., Vibration of Cylindrical Shells with Ring Support, *J. Impact Engineering*, 1996, Vol. 35, pp.455-463.
- [2] Xiang Y., Kitipornchai S., Lim C.W., Lau C.W.H., Exact solutions for vibration of cylindrical shells with intermediate ring supports, *Int. J. Mechanical Sciences*, Vol. 44(9),2002, pp.1907-1924.
- [3] Patel B.P., Gupla S.S., Moknath M.S., Free Vibration analysis of FGM elliptical cylindrical shells, *Composite structures*, Vol. 69(3), 2004, pp. 259-270.
- [4] Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., Vibration of functionally graded cylindrical shells. *J. Mechanical Sciences*, Vol.41 (3), 1999, pp. 309-324.
- [5] Chen Q.W., Bian Z.G., Ding D.H., Three dimensional vibration analysis of fluid-filled Orthotropic FGM Cylindrical Shell. *Journal of Mechanical Sciences*, Vol 46, 2004, pp. 159-162.
- [6] Prandhan S.C., Log C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., Vibration Characteristics of FGM Cylindrical Shells under Various Boundaries. *Applied an Acoustics*, 2000, Vol. 61, pp.117-126.
- [7] Liew K.M., Kitipornchai S., Zhang X.Z., Analysis of the Thermal Stress Behavior of Functionally Graded Hollow Circular Cylinders. *J. Functional Materials*, 1994, Vol 25, pp. 452-465.
- [8] Sofiger A.H., Schanck E., The Stability of FG cylindrical shells under linearly increasing dynamic torsional loading, *Engineering Structures*, Vol. 26, 2004, pp.1323-1326.
- [9] Gong S.W., Lam K.Y., Reddy, J.N. The elastic response of FGM cylindrical shells low-velocity. *J Impact Engineering*, Vol.22 (4), 1999, pp. 397-417.
- [10] Naeem M.N., Arshad S.H., The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells, *J. Mechanical Engineering Science*, Vol. 224,Part C, , 2009, pp. 43-54.
- [11] Mumtaz A., Muhammad N., Vibration Characteristics of Rotating FGM Circular Cylindrical Shells Using Wave Propagation Method. *European Journal of Scientific Research*, Vol. 36 ,No.2, 2009, pp.184-235.

پیوست

معادله A:

$$-\frac{\partial(N_{11}A_r)}{\partial\alpha_1} + N_{rr} \frac{\partial A_r}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(N_{1r}A_r^y)}{A_1\partial\alpha_r} - \frac{Q_{1r}}{R_1} A_1 A_r - \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{P_{1r}C_1 A_r}{R_1} \right) + \frac{P_{rr}C_1}{R_1} \frac{\partial A_r}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{P_{1r}C_1 A_r^y}{R_1} \right) \frac{1}{A_1} + \frac{rC_1 R_{1r}}{R_1} A_1 A_r - \frac{C_1 P_{1r} A_1 A_r}{R_1^y} = -(\ddot{u}_1 I_o + \ddot{\phi}_1 I_1) + \left[-C_1 \left(-\frac{\ddot{u}_1}{R_1} + \ddot{\phi} + \frac{\partial \ddot{u}_r}{A_1 \partial\alpha_1} \right) + \frac{C_1 \ddot{\phi}_1}{R_1} \right] I_r + \frac{C_1 \ddot{\phi}_1}{R_1} I_\varphi - \frac{C_1^y}{R_1} \left(-\frac{\ddot{u}_1}{R_1} + \ddot{\phi}_1 + \frac{\partial \ddot{u}_r}{A_1 \partial\alpha_1} \right) I_\varphi$$

معادله B:

$$\frac{\partial(N_{rr}A_1)}{\partial\alpha_r} - N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_r} + \frac{\partial(N_{1r}A_r^y)}{A_r\partial\alpha_1} + \frac{Q_{rr}}{R_r} A_1 A_r + \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{P_{rr}C_1 A_1}{R_r} \right) - \frac{P_{1r}C_1}{R_r} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_r} + \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{P_{1r}C_1 A_r^y}{R_r} \right) \frac{1}{A_r} - \frac{rC_1 R_{rr}}{R_r} A_1 A_r + \frac{C_1 P_{rr} A_1 A_r}{R_r^y} = (\ddot{u}_r I_o + \ddot{\phi}_r I_1 + \frac{C_1 \ddot{\phi}_r}{R_r} I_{\varphi r} + \left[-c_1 \left(-\frac{\ddot{u}_r}{R_r} + \ddot{\phi}_r + \frac{\partial \ddot{u}_r}{A_r \partial\alpha_r} \right) + \frac{C_1 \ddot{u}_r}{R_r} \right] I_r - \frac{C_1^y}{R_r} \left(-\frac{\ddot{u}_r}{R_r} + \ddot{\phi}_r + \frac{\partial \ddot{u}_r}{A_r \partial\alpha_r} \right) I_\varphi$$

معادله C:

$$\left(-\frac{\partial^y(P_{1r}C_1 A_r / A_1)}{\partial\alpha_1^y} + N_{11} \frac{A_1 A_r}{R_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{C_1 P_{1r}}{A_r} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_r} \right) + N_{rr} \frac{A_1 A_r}{R_r} - \frac{\partial^y(P_{rr} A_1 C_1 / A_r)}{\partial\alpha_r^y} + \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{P_{rr}C_1}{A_1} \frac{\partial A_r}{\partial\alpha_1} \right) - \frac{\partial^y(P_{1r}C_1)}{\partial\alpha_1 \partial\alpha_r} - \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{P_{1r}C_1}{A_r^y} \frac{\partial A_1^y}{\partial\alpha_1} \right) - \frac{\partial^y(P_{1r}C_1)}{\partial\alpha_1 \partial\alpha_r} - \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{P_{1r}C_1}{A_1^y} \frac{\partial A_1^y}{\partial\alpha_r} \right) - \frac{\partial(Q_{1r}A_r)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(rC_1 R_{1r}A_r)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{P_{1r}C_1 A_r}{R_1} \right) - \frac{\partial(Q_{rr}A_1)}{\partial\alpha_r} + \frac{\partial(rC_1 R_{rr}A_1)}{\partial\alpha_r} - \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{C_1 P_{rr} A_1}{R_r} \right) - \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{P_{1r}C_1 A_r}{A_1^y} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1} \right) - \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(P_{rr}C_1 \frac{A_1}{A_r^y} \frac{\partial A_r}{\partial\alpha_r} \right) = -\{\ddot{u}_r I_o + C_1 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{u_r}{A_r} \right) \right] I_r + C_1 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{\phi_1}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{\phi_r}{A_r} \right) \right] I_\varphi - C_1^y I_\varphi \left(-\frac{\partial}{R_r \partial\alpha_r} \left(\frac{\ddot{u}_r}{A_r} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_r} \left(\frac{\ddot{\phi}_r}{A_r} \right) + \frac{1}{A_r} \frac{\partial^y \ddot{u}_r}{\partial\alpha_r^y} - \frac{\partial A_r}{A_1^y \partial\alpha_r} \frac{\partial \ddot{u}_r}{\partial\alpha_r} \right) + \left(-\frac{\partial}{R_1 \partial\alpha_1} \left(\frac{\ddot{u}_1}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \left(\frac{\ddot{\phi}_1}{A_1} \right) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial^y \ddot{u}_r}{\partial\alpha_1^y} - \frac{\partial A_1}{A_1^y \partial\alpha_1} \frac{\partial \ddot{u}_r}{\partial\alpha_1} \right)$$

معادله D:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial(M_{11}A_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(C_1P_{11}A_1)}{\partial\alpha_1} + M_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1} - C_1P_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(M_{11}A_1^y)}{A_1\partial\alpha_1} + \frac{\partial(P_{11}C_1A_1^y)}{A_1\partial\alpha_1} - \\
& -\mathfrak{r}C_1R_{11}A_1A_1 + A_1A_1Q_{11} + \frac{C_1P_{11}}{R_1}A_1A_1 = -[\ddot{u}_1I_1 + \ddot{\phi}_1I_1 - C_1\ddot{u}_1I_1 + (-\mathfrak{r}C_1\ddot{\phi}_1 + C_1\frac{\ddot{u}_1}{R_1} - \\
& -\frac{C_1}{A_1}\frac{\partial\ddot{u}_1}{\partial\alpha_1})I_\varphi + C_1^y(-\frac{\ddot{u}_1}{R_1} + \ddot{\phi}_1 + \frac{\partial\ddot{u}_1}{A_1\partial\alpha_1})I_\varphi]
\end{aligned}$$

معادله E:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial(M_{11}A_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(C_1A_1P_{11})}{\partial\alpha_1} + M_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1} - C_1P_{11}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(M_{11}A_1^y)}{A_1\partial\alpha_1} + \frac{\partial(P_{11}C_1A_1^y)}{A_1\partial\alpha_1} - \\
& -\mathfrak{r}C_1R_{11}A_1A_1 + A_1A_1Q_{11} + \frac{C_1P_{11}}{R_1}A_1A_1 = -[\ddot{u}_1I_1 + \ddot{\phi}_1I_1 - C_1\ddot{u}_1I_1 + (-\mathfrak{r}C_1\ddot{\phi}_1 + \\
& + C_1\frac{\ddot{u}_1}{R_1} - \frac{C_1}{A_1}\frac{\partial\ddot{u}_1}{\partial\alpha_1})I_\varphi + C_1^y(\frac{\ddot{u}_1}{R_1} + \ddot{\phi}_1 + \frac{\partial\ddot{u}_1}{A_1\partial\alpha_1})I_\varphi]
\end{aligned}$$