

تحلیل مسائل مقدار مرزی دو بعدی خطی با استفاده از روش بدون المان کالوکیشن هرمیتی

محمدامین بهرامی^{۱*} مهرداد فروتن^۲

* نویسنده مسئول: mabahrami@email.iauksh.ac.ir

چکیده

روش بدون المان کالوکیشن برای حل مسائل مقدار مرزی خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش با روشهای بدون المان شکل ضعیف مانند روش گالرکین متفاوت است و احتیاجی به شبکه‌بندی سلولی و انتگرال‌گیری عددی ندارد. لذا محدودیتهای انتگرال‌گیری عددی مانند زمانبر بودن حل و دقت حل را ندارد و معادلات جدا شده می‌توانند مستقیماً از شکل قوی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر مسئله تعیین شوند. اما مشکل اساسی این روش ناپایداری حل به‌خصوص در حالت وجود شرایط مرزی شامل مشتق است. در این مقاله برای اعمال شرایط مرزی شامل مشتق از توابع شکل هرمیتی استفاده شده، چنان‌که استفاده از این توابع شکل دقت حل را به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیده است. همچنین اثر پارامترهای مختلف مانند نوع توابع وزن، مرتبه بردار پایه، پارامتر اتساع و توزیع گره‌ای بر روی دقت حل مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: روش بدون المان کالوکیشن، کالوکیشن هرمیتی، شرط مرزی مشتق، مسائل مقدار مرزی خطی.

۱- مری، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی مرکز روانسر.

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه رازی کرمانشاه.

۱- مقدمه

برای شبیه‌سازی هر پدیده فیزیکی ابتدا باید معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر آن پدیده را یافت و سپس به حل آن پرداخت. از آنجایی که حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سخت و یا غیرممکن است لذا برای حل آنها از روشهای عددی استفاده می‌شود [۱].

در این مقاله به تحلیل مسائل مقدار مرزی دو بعدی خطی با استفاده از روش بدون المان شکل قوی کالوکیشن پرداخته شده است. روشهای شکل ضعیف بدون المان احتیاج به انتگرال‌گیری عددی دارند و به‌طور کامل بدون مش نیستند یعنی احتیاج به شبکه‌بندی سلولی دارند [۲] و برای تحلیل مسائل خطی به صرفه نیستند. از این رو برای تحلیل این نوع مسئله از روش بدون المان شکل قوی کالوکیشن استفاده شده است. روش بدون المان کالوکیشن یک روش کاملاً بدون المان و بدون انتگرال است و از شکل قوی معادلات برای تحلیل مسئله استفاده می‌کند. این روش مسئله را به نقاطی به نام گره تقسیم می‌کند و با تعریف توابع شکل برای هر گره به تقریب تابع در هر گره پرداخته و به حل مسئله می‌پردازد.

برای اعمال شرایط مرزی در روش بدون المان کالوکیشن نیازی به وجود شرط دلتای کرونیگر در گره‌های مرزی نیست و برای اعمال شرط مرزی از شکل قوی معادلات مرزی مسئله استفاده می‌شود. همچنین در روش بدون المان شکل قوی، علاوه بر ارضاء شرایط مرزی اساسی باید شرایط مرزی مشتق (طبیعی) DBC^۱ نیز ارضا شود.

یکی از مشکلات روش بدون المان کالوکیشن وجود شرایط مرزی مشتق است که حل را به شدت ناپایدار می‌کند [۵]. در این مقاله به این مشکل پرداخته شده است و تکنیکی برای اعمال این نوع شرط مرزی برای پایدار کردن حل ارائه شده است. روش کالوکیشن روشی از نوع هرمیتی^۲ است که با استفاده از توابع شکل هرمیتی به حل این مشکل

می‌پردازد و برای گره‌های روی مرز مشتق، متغیر مشتق به‌عنوان یک درجه آزادی اضافی اضافه می‌کند [۴].

لیسکا یک طرح میانایی هرمیتی را در روش تفاضل محدود تعمیم یافته^۳ برای بهبود دقت روش کالوکیشن پیشنهاد داده است [۵]. توابع شکل هرمیتی در حل مسائل غیرخطی دارای شرط مرزی مشتق، دقت حل را افزایش می‌دهد [۶و۲]. همچنین در این مقاله از تقریب MLS^۴ استفاده شده است که برای اطلاع بیشتر به مرجع [۳] رجوع شود.

در ابتدا برای پی بردن به دقت روش بدون المان کالوکیشن در حل، مسئله دو بعدی یکبار با شرایط مرزی بدون مشتق و بار دیگر با شرایط مرزی مشتق حل شده است. سپس همین مسئله با روش کالوکیشن هرمیتی حل شده و نتایج با نتایج واقعی مقایسه شده است. در این مقاله مسئله دوبعدی به کار برده شده مسئله هلمهولتز است.

۲- توابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS) نوع هرمیتی

توابع شکل MLS نوع هرمیتی یک بسط از MLS است که در ادامه به شرح آن پرداخته شده است. در شکل (۱) مشتقات نرمال تابع در گره‌های DB به‌صورت متغیرهایی علاوه بر متغیرهای مقادیر توابع گره‌ای مطرح شده‌اند و مقادیر آنها برابر است با

$$\frac{\partial u(x_i^{DB})}{\partial n} = l_{xi} \frac{\partial u(x_i^{DB})}{\partial x} + l_{yi} \frac{\partial u(x_i^{DB})}{\partial y} \quad (1)$$

که n بردار واحد نرمال بیرونی است و l_{xi} و l_{yi} کسینوس‌های جهتی برای نرمال بیرونی در گره DB در (x_i^{DB}, y_i^{DB}) هستند که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} l_{xi} &= \cos(n, x_i^{DB}) \\ l_{yi} &= \cos(n, y_i^{DB}) \end{aligned} \quad (2)$$

۳- Generalized Finite Difference Method

۴- Moving Least-Squares Approximation

۱- Derivative Boundary Conditions

۲- Hermite Type Meshfree Collocation Method

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & p_m(x_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \dots & p_m(x_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & \dots & p_m(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

و داریم:

$$U_s^T = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n\} \quad (9)$$

با ترکیب کردن معادلات (۴) و (۷) رابطه کلی زیر

به دست می آید:

$$U_s^D = P_m a = \begin{Bmatrix} P_m \\ P_D \end{Bmatrix} a \quad (10)$$

که U_s^D بردار ترکیب کننده همه مقادیر گره‌های تابع در n

گره و همه مشتقات نرمال گره‌های تابع در n_{DB} گره DB است.

$$U_s^D = \left\{ u_1(x_1) \ u_2(x_2) \ \dots \ u_n(x_n) \ \frac{\partial u(x_j^{DB})}{\partial n} \ \frac{\partial u(x_r^{DB})}{\partial n} \ \dots \ \frac{\partial u(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial n} \right\} \quad (11)$$

برای حل معادله (۱۰) از حداقل سازی تابع مربعات

خطای وزنی استفاده می شود:

$$J = \sum_{i=1}^n \hat{W}_i [u^h(x_i) - u(x_i)]^2 + \sum_{j=1}^{n_{DB}} \hat{W}_j^{DB} \left[\frac{\partial u^h(x_j^{DB})}{\partial n} - \frac{\partial u(x_j^{DB})}{\partial n} \right]^2 \quad (12)$$

که \hat{W}_i و \hat{W}_j^{DB} ضرایب وزنی هستند و u_i و $\frac{\partial u(x_j^{DB})}{\partial n}$

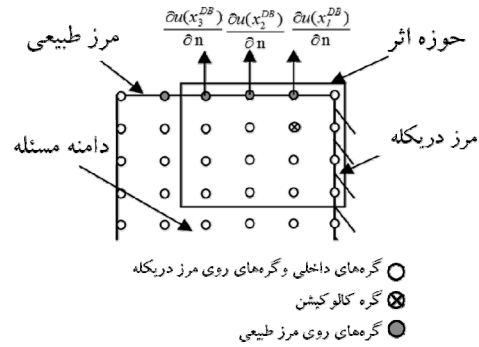
به ترتیب پارامترهای گره‌های u در $x = x_i$ و مشتقات نرمال u

در $x = x_j^{DB}$ هستند. با شرط ثابت

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (13)$$

مقدار \hat{W} برابر است با:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{W}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \hat{W}_n & & & \\ & & & \hat{W}_1^{DB} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \hat{W}_{n_{DB}}^{DB} \end{bmatrix} \quad (14)$$



شکل (۱) درونمایی هرمیتی با مشتقات نرمال به صورت درجات آزادی اضافی

برای همه گره‌های DB، معادله (۱) به صورت زیر نوشته

می شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x_j^{DB})}{\partial n} = a_1 + a_2 l_{xj} + a_3 l_{yj} + a_4 (y_j^{DB} l_{xj} + x_j^{DB} l_{yj}) + \dots \\ \frac{\partial u(x_r^{DB})}{\partial n} = a_1 + a_2 l_{xr} + a_3 l_{yr} + a_4 (y_r^{DB} l_{xr} + x_r^{DB} l_{yr}) + \dots \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial n} = a_1 + a_2 l_{xn_{DB}} + a_3 l_{yn_{DB}} + a_4 (y_{n_{DB}}^{DB} l_{xn_{DB}} + x_{n_{DB}}^{DB} l_{yn_{DB}}) + \dots \end{cases} \quad (3)$$

رابطه (۳) به شکل ماتریس به صورت زیر است

$$U_s' = P_D a \quad (4)$$

که U_s' برداری است که همه مشتقات نرمال مقادیر گره‌های

تابع در گره‌های DB را در بر می گیرد و داریم:

$$U_s'^T = \left\{ \frac{\partial u(x_j^{DB})}{\partial n} \ \frac{\partial u(x_r^{DB})}{\partial n} \ \dots \ \frac{\partial u(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial n} \right\} \quad (5)$$

ماتریس P_D برابر است با

$$P_D = \begin{bmatrix} l_{x1} \ l_{y1} \ \dots \ l_{x1} \ \frac{\partial p_m(x_1^{DB})}{\partial x} + l_{y1} \ \frac{\partial p_m(x_1^{DB})}{\partial y} \\ l_{x2} \ l_{y2} \ \dots \ l_{x2} \ \frac{\partial p_m(x_2^{DB})}{\partial x} + l_{y2} \ \frac{\partial p_m(x_2^{DB})}{\partial y} \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ l_{xn_{DB}} \ l_{yn_{DB}} \ \dots \ l_{xn_{DB}} \ \frac{\partial p_m(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial x} + l_{yn_{DB}} \ \frac{\partial p_m(x_{n_{DB}}^{DB})}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6)$$

و داریم:

$$U_s = P_m a \quad (7)$$

که U_s متغیرهای مقادیر توابع گره‌ای و ماتریس P_m

به صورت زیر تعریف می شود:

x یک نقطه روی مرز مشتق Γ_{DB} است. B_1 و B_0 به صورت توابعی از x داده شده‌اند و q_B یک شرط منبع داده شده روی Γ_{DB} است.

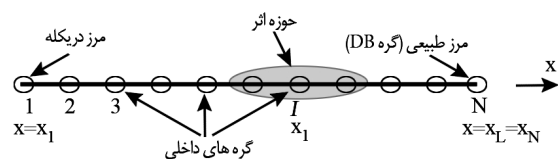
شرایط مرزی دریکله:

$$u(x) - \bar{u} = 0 \quad (21)$$

x یک نقطه روی مرز دریکله Γ_u و \bar{u} مقدار ویژه برای میدان تابع است.

فرض کنید N_d گره داخلی و $N_b = N_{DB} + N_u$ گره مرزی وجود دارد که N_{DB} تعداد گره‌های روی مرز مشتق و N_u تعداد گره‌های روی مرز دریکله هستند.

حوزه یک بعدی نشان داده شده در شکل (۲) را در نظر بگیرید که x_1 روی مرز دریکله و x_L روی مرز مشتق است. بنابراین $N_{DB} = 1$ و $N_u = 1$. دامنه مسئله بوسیله N گره جایگذاری شده است. از این رو $N - 2$ گره داخلی وجود دارد.



شکل (۲) توزیع گره‌ای به کار برده شده در حوزه مسئله یک بعدی.

با استفاده از توابع شکل بدون المان MLS نوع هرمیتی

$$u^h(x_i) = \Phi^T u_s = \{\phi_1 \dots \phi_n \phi^H\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_1 \\ u'_N \end{Bmatrix} \quad (22)$$

که Φ بردار توابع شکل تعیین شده با استفاده از تقریب نوع هرمیتی است و ϕ^H تابع شکل مربوط به درجه آزادی مشتق است. u'_N نیز بردار مجموعه مقادیر توابع گره‌ای است و $u'_N = \frac{du(x_N)}{dx}$ درجه آزادی مشتق اضافه شده است. از این

رو مشتقات u در گره i به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\frac{\partial u_i^h}{\partial x} = \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} u_s = \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \dots \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \frac{\partial \phi^H}{\partial x} \right\} u_s \quad (23)$$

که در آن $\bar{W}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ضریب وزن مربوط به مقدار تابع برای گره i در حوزه اثر است و $\bar{W}_j^{DB} (j = 1, 2, \dots, n_{DB})$ ضریب وزن مربوط به گره DB ، نام است. تابع وزن \bar{W}_i می‌تواند با به کار بردن هر تابع وزنی تعیین شود. \bar{W}_j^{DB} نیز می‌تواند با هر تابع وزنی تعیین شود. همچنین تابع وزن \bar{W}_j^{DB} می‌تواند با استفاده از \bar{W}_j تعیین شود. برای مثال داریم:

$$\bar{W}_j^{DB} = \frac{1}{\beta} \bar{W}(x - x_j^{DB}) \quad (15)$$

که β یک ثابت است که قبل از تحلیل می‌تواند تعیین شود. ضرایب مجهول a به صورت زیر به دست می‌آیند

$$a = (P^T \bar{W} P)^{-1} (P^T \bar{W}) U_S^D \quad (16)$$

مقدار u^h به صورت زیر می‌شود

$$u^h = P^T a = P^T (P^T \bar{W} P)^{-1} (P^T \bar{W}) U_S^D = \Phi^T U_S^D \quad (17)$$

بنابراین بردار توابع شکل هرمیتی در یک گره که گره‌هایی از نوع DB در حوزه اثر آن باشند به صورت زیر خواهد بود.

$$\Phi^T = \{\phi_1 \dots \phi_i \dots \phi_n \phi_1^H \dots \phi_j^H \dots \phi_{n_{DB}}^H\} \quad (18)$$

که $\phi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ تابع شکل مرتبط با گره i در حوزه اثر و $\phi_j^{DB} (j = 1, 2, \dots, n_{DB})$ تابع شکل مرتبط با گره DB است [۴].

۳- روش بدون المان کالوکیشن

معادلات حاکم به وسیله معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه دوم عمومی (ODE) در حوزه یک بعدی Ω به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$A_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + A_1(x) \frac{du}{dx} + A_0(x) u + q_A(x) = 0 \quad (19)$$

که u تابع میدان اسکالر مجهول است، ضرایب A_1 و A_2 و A_0 داده شده‌اند و ممکن است وابسته به x باشند و q_A یک شرط منبع داده شده است که همچنین می‌تواند تابعی از x باشد. دو نوع از شرایط مرزی وجود دارند:

شرایط مرزی مشتق (DBC):

$$B_1(x) \frac{du}{dx} + B_0(x) u + q_B(x) = 0 \quad (20)$$

- شرایط مرزی دریکله

$$u(x, y)|_{x=0} = 0; \quad u(x, y)|_{y=0} = xe^x \quad (۳۱)$$

- شرایط مرزی طبیعی DBC

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 2e^{1-y}; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=1} = -xe^{x-1} \quad (۳۲)$$

و حل دقیق آن برابر است با

$$u^{exact}(x, y) = xe^{x-y} \quad (۳۳)$$

برای نشان دادن تاثیر DBC باید به بررسی این مسئله بدون شرایط مرزی طبیعی پرداخت لذا DBC ها با شرایط دریکله زیر جایگزین می شوند:

$$u(x, y)|_{x=1} = e^{1-y}; \quad u(x, y)|_{y=1} = xe^{x-1} \quad (۳۴)$$

مسئله با توزیع گره‌ای 21×21 با تابع وزن اسپیلین مرتبه ۴، پارامتر اتساع $2/4$ ، بردار پایه مرتبه ۲، با DBC به روش کالوکیشن هرمیتی تحلیل شده و با استفاده از رابطه (۳۵) درصد خطا در هر گره به دست می آید:

$$Error_i = 100 \times \frac{|u_i^{exact} - u_i^{num}|}{|u_i^{exact}|} \quad (۳۵)$$

که شکل (۳) نمودار درصد خطا برای تمام گره‌ها برای مسئله بالا را نشان می دهد که مرزها دارای بیشترین میزان خطاست. شاخص کلی خطا با استفاده از معادله (۳۶) برای مقایسه خطاها تعریف شده است.

$$e_o = 100 \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{exact} - u_i^{num})^2}{\sum_{i=1}^N (u_i^{exact})^2}} \quad (۳۶)$$

پارامتر اتساع یکی از فاکتورهایی است که بر دقت حل تاثیر زیادی دارد. شکل (۴) و (۵) نمودار پارامتر اتساع بر حسب درصد خطا را برای روش کالوکیشن مستقیم و کالوکیشن هرمیتی نشان می دهد که در $d_{max} = 2/4$ کمترین میزان خطا را دارند.

$$\frac{\partial^2 u_i^h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} u_s = \left\{ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi^H}{\partial x^2} \right\} u_s \quad (۲۴)$$

بنابراین برای یک گره داخلی که حوزه اثرش گره DBها را شامل می شود. ماتریس گره‌ای K_I از به کار بردن معادله (۱۹) که دوباره نوشته می شود به دست می آید:

$$\underbrace{\left(A_r(x_I) \frac{d^2 \Phi^T}{dx^2} + A_l(x_I) \frac{d \Phi^T}{dx} + A_o(x_I) \Phi^T \right)}_{K_I} u_s = \underbrace{-q_A(x_I)}_{f_I}$$

برای گره DB، دو معادله باید در گره DB در x_N ارضا شود. این دو معادله، یکی معادله (۱۹) است که نتایج در ماتریس گره‌ای مشابه K_N جایگزین می شود و دیگری معادله (۲۰) است که ماتریس گره‌ای K_{N+1} برای گره کالوکیشن در x_N به صورت زیر نوشته می شود:

$$\underbrace{\left(A_r(x_N) \frac{d^2 \Phi^T}{dx^2} + A_l(x_N) \frac{d \Phi^T}{dx} + A_o(x_N) \Phi^T \right)}_{K_N} u_s = \underbrace{-q_A(x_N)}_{f_N} \quad (۲۶)$$

$$\underbrace{\left(B_l(x_{N+1}) \frac{d \Phi^T}{dx} + B_o(x_{N+1}) \Phi^T \right)}_{K_{N+1}} u_s = \underbrace{-q_B(x_{N+1})}_{f_{N+1}} \quad (۲۷)$$

برای یک گره در x_1 که روی مرز دریکله است داریم:

$$\underbrace{\Phi^T}_{K_1} u_s = \underbrace{\bar{u}_1}_{f_1} \quad (۲۸)$$

با ترکیب کردن معادلات برای همه گره‌ها، سیستم معادلات تفکیک شده به صورت زیر تعیین می شود [۴].

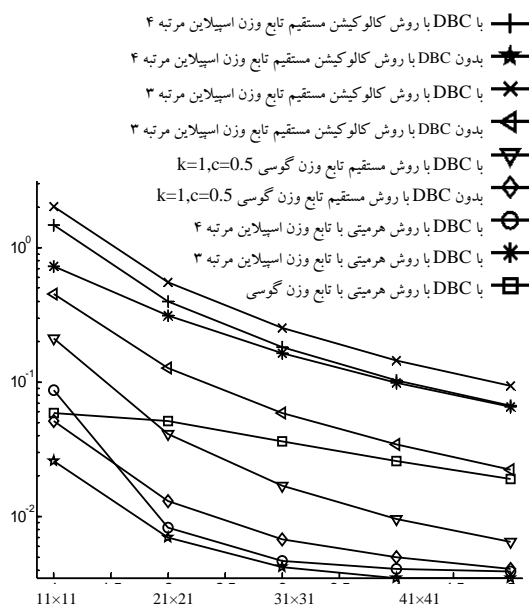
$$K_{(N+1) \times (N+1)} U_{(N+1) \times 1} = F_{(N+1) \times 1} \quad (۲۹)$$

۴- نتایج

معادله هلمهولتز زیر در میدان $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ در نظر گرفته شده است:

$$\nabla^2 u + u = (2 + 3x)e^{x-y} \quad (۳۰)$$

که شرایط مرزی آن به شکل زیر داده شده است:



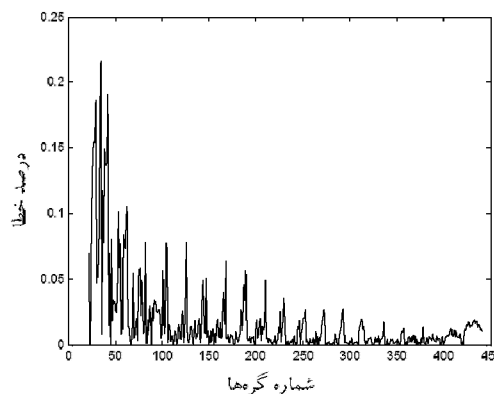
شکل (۶) نمودار لگاریتمی درصد خطا برحسب توزیع گره‌ای برای حالت‌های مختلف روش‌های کالوکیشن مستقیم و هرمیتی.

۵- نتیجه گیری

روش‌های بدون المان کالوکیشن نسبت به روش‌های شکل ضعیف بدون المان دارای فرمول‌بندی آسانتر و کارایی بیشتری است. با انتخاب پارامترهای مناسب برای هر روش می‌توان به دقت خوبی از حل رسید. برای مسئله حل شده در صورت نبود شرط مرزی مشتق، روش کالوکیشن مستقیم با تابع وزن اسپیلاین مرتبه ۴ و پارامتر اتساع ۲/۴ دقت خوبی را نتیجه می‌دهد. در صورت وجود شرط مرزی مشتق، در روش کالوکیشن مستقیم با تابع وزن گوسی و پارامتر اتساع ۲/۴ دقت بهتری به دست می‌آید. اما بیشترین دقت در صورت وجود شرط مرزی مشتق، برای روش کالوکیشن هرمیتی با تابع وزن اسپیلاین مرتبه ۴ و پارامتر اتساع ۲/۴ است.

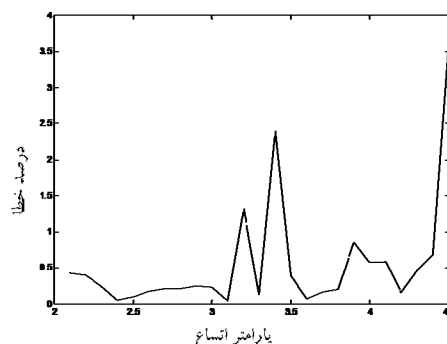
مراجع

- [1] Thoma P.F., Hermann G.M., *Classification and Overview of Meshfree Methods*, Institute of Scientific Computing Technical University Braunschweig Brunswick, 2004, Germany.

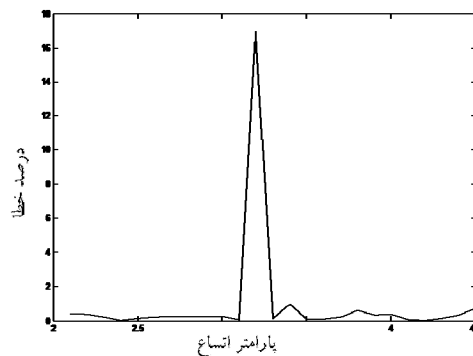


شکل (۳) نمودار درصد خطا برای تمام گره‌ها در روش کالوکیشن هرمیتی.

مرتبه بردار پایه، نوع تابع وزن، پارامتر اتساع و توزیع گره‌ای بر دقت حل مسئله تاثیر زیادی دارد و با انتخاب مناسب می‌توان به دقت مورد نظر دست یافت. شکل (۶) مقایسه روش‌های بدون المان کالوکیشن مستقیم و هرمیتی با توابع وزن و توزیع گره‌ای مختلف است.



شکل (۴) نمودار درصد خطا برحسب پارامتر اتساع در روش کالوکیشن مستقیم.



شکل (۵) نمودار درصد خطا برحسب پارامتر اتساع در روش کالوکیشن هرمیتی.

- [2] Yong-Ming Guo., Kenji Nakanishi., Yasuto Yokouchi., *A nonlinear rigid-plastic analysis for metal forming problem using the rigid-plastic point collocation method*, Advances in Engineering Software 36, 2005, pp.234–242.
- [3] Liu. W.K, Li. S, Belytschko T. , *Moving Least Square Reproducing Kernel Methods (I) Methodology and Convergence*, Comp. Methods. Appl. Mech. Eng. 1996.
- [4] G.R. Liu., Gu Y.T. , *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, National University of Singapore, Singapore., 1981.
- [5] Liszka T.J., Duarte C.A. , Tworzydło W.W. , *Hp-meshless cloud method*, Comput, Methods Appl. Mech. Eng. 139, 1996, pp. 263-288.
- [6] Foroutan Mehrdad., Bahrami Mohammad Amin, *Analysis of Plane Strain Upsetting by Hermitian Meshless Collocation Method* , Steel Research Int.81, No.9, 2010, pp. 1462-1465.