

## تأثیر کشش سطحی بر تحلیل ارتعاشات غیر خطی نانو لوله

جعفر اسکندری جم<sup>۱</sup>، یاسر میرزایی<sup>۲\*</sup>، بهنام قشلاقی<sup>۳</sup>

\* ایمیل نویسنده مسئول: Mirzaei@damavandiau.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

ارتعاشات غیرخطی، کشش سطح، نانو لوله.

### چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات غیرخطی نانو لوله‌ها با استفاده از تئوری اویلر برنولی تیر و با در نظر گرفتن مدل غیرخطی هندسی ون-کارمن به همراه اثرات کشش سطحی پرداخته شده است. با به کارگیری مدهای ارتعاشات آزاد مسئله خطی، فرکانس‌های طبیعی غیرخطی نانو لوله با شرایط مرزی ساده بر حسب توابع بیضوی ژاکوبی به دست آورده شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که کشش سطح، شماره مود، دامنه ارتعاشات و طول نانو لوله اثرات مورد توجهی بر خواص ارتعاشی نانو لوله‌ها دارند. همچنین تأثیر کشش سطح بر روی نمودار فاز مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت، مشاهده شده است که تأثیر کشش سطح با افزایش ابعاد نانو لوله از بین می‌رود. مطالعه حاضر را می‌توان در بهبود طراحی انواع مختلف میکرو-نانو سنسورها مورد استفاده قرار داد.

۱- دانشیار، مرکز کامپوزیت، تهران.

۲- استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد دماوند.

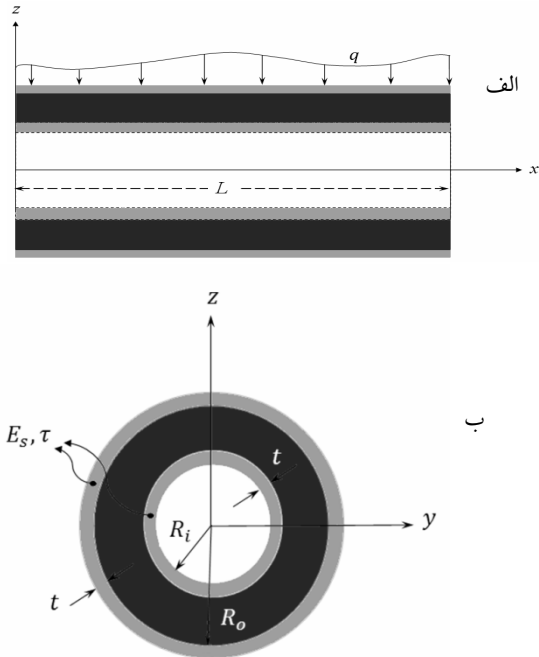
۳- کارشناس ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد دماوند.

## ۱- مقدمه

نانولوله‌ها کاربردهای وسیعی در نسل آینده در صنعت نانو تکنولوژی دارند. خواص مکانیکی منحصر به فرد نانو لوله‌ها توجه شایان ذکری را به دلیل کاربرد بالقوه آنها در سیستم‌های نانوالکترومکانیک یا میکرو الکترومکانیک، به عنوان عملگر [۱]، فنر [۲]، و نوسان کننده [۳،۴] به خود جلب کرده است. به دلیل نسبت بالای بین سطح یا وجه مشترک و حجم، خواص فیزیکی و مکانیکی نانو سازه‌ها به اثرات سطح وابسته است [۲،۵]. تحقیقات فراوانی بر روی اثرات سطح در نانو سازه‌ها انجام شده است. برای مثال، لاگوسکی و همکارانش [۵] اثرات تنش سطح باقیمانده را بر روی مودهای قائم ارتعاشات کریستال‌های نازک بررسی کردند. سادر [۶] اثرات سطح را بر روی تغییر شکل خمشی تیر یک سر گیردار میکروسکوپ اتمی در نظر گرفت. همچنین لی و همکارانش [۷] تأثیرات جرم و تنش را بر روی تغییرات فرکانس‌های تشدید یک میکرو تیر نشان دادند. هی و لی [۸] اثرات سطح را بر روی رفتار الاستیک نانو سیم‌ها در خمش استاتیکی در نظر گرفتند. ونگ و فنگ [۹] و عباسیون و همکارانش [۱۰] به ترتیب اثرات سطح را بر روی فرکانسهای طبیعی میکروتیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو بررسی کردند. مدل‌های ارتعاشی تیرها، جهت نمایش ارتعاشات دیگر نانو ساختارها همچون نانو لوله‌ها بکار می‌روند. ژنگ و همکارانش [۱۱] ارتعاشات موجی نانو لوله‌های تک جداره را با بکارگیری مدل ارتعاشی تیر تیموشنکو و با استفاده از دینامیک مولکولی مطالعه کردند. این مطلب حایز اهمیت است که بسیاری از مدل‌های پیوسته موجود برای نانو لوله‌ها، بر مبنای تحلیل‌های خطی می‌باشند. اخیراً تعداد اندکی تحلیل بر روی جنبه‌های غیرخطی ارتعاشات نانو لوله‌ها انجام شده است. فو و همکارانش [۱۲] به مطالعه ارتعاشات آزاد غیر خطی نانو لوله‌های چندجداره، با در نظر گرفتن هندسه غیر خطی مدل تیر، پرداختند. از آنجایی که برخی خواص نانو لوله‌ها، برای مثال مدول یانگ، را می‌توان از تحلیل فرکانسی آنها به دست آورد لذا تحلیل فرکانس ارتعاشات نانو لوله‌ها یکی از مهمترین بررسی‌ها می‌باشد. در کار حاضر اثر سطح بر روی ارتعاشات آزاد غیر خطی نانو لوله‌ها در چارچوب مدل اویلر-برنولی و هندسه غیر خطی فون کارمن بررسی شده است.

## ۲- فرمول بندی

یک نانو لوله با طول  $L$ ، شعاع داخلی  $R_i$  و شعاع خارجی  $R_o$ ، و ضخامت  $t = R_o - R_i$ ، بطوریکه در شکل (۱) نشان داده شده است، را در نظر بگیرید.



شکل (۱) الف) هندسه مساله، ب) سطح مقطع نانو لوله.

اثر سطح را می‌توان با انرژی سطح یا با تنش سطحی بیان کرد. گیبس [۱۳] و کاماراتا [۱۴] رابطه بین تانسور تنش سطحی،  $\sigma_{\alpha\beta}^s$ ، و چگالی انرژی سطحی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \gamma \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^s} \quad (1)$$

بطوریکه  $\varepsilon_{\alpha\beta}^s$  نمایش دهنده تانسور کرنش سطحی،  $\delta_{\alpha\beta}$  دلتای کرونیکر و  $\alpha$  و  $\beta$  می‌توانند اعداد ۱ یا ۲ باشند. شکل یک بعدی و خطی معادله بالا را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\sigma^s = \tau^0 + E^s \varepsilon \quad (2)$$

در این رابطه  $\tau^0$  نشان دهنده تنش سطحی در طول نانو لوله،  $E^s$  مدول الاستیک سطح و  $\varepsilon$  کرنش ناشی از نیروی وارده در طول نانو لوله هستند. به منظور توضیح تنش خارج از صفحه ناشی از تنشهای درون صفحه‌ای بین سطوح انحنا دار، معادله یانگ-لاپلاس چنین عبارتی را بفرم ریاضی ارائه می‌کند [۹] و [۱۵ و ۱۶]:

$$\Delta \sigma_{ij} n_i n_j = \tau^0 \kappa \quad (3)$$

حاکم (۷-الف)، و سپس با ضرب کردن طرفین در شکل مود و انتگرال گیری در طول نانولوله، معادله دیفرانسیل زیر به دست می آید:

(۹-الف)

$$T^{\prime\prime} + \left( \frac{EI}{\rho A} a_{\varphi} - \frac{\tau^{\circ} b}{\rho A} a_{\psi} \right) T - \frac{Cl}{\rho A} \left( \frac{a}{r} \right)^{\prime\prime} \alpha_1 \alpha_2 T^{\prime\prime\prime} \\ a_{\varphi} = \frac{\int_0^L X^{(iv)} X dx}{\int_0^L X^{\prime\prime} dx}, a_{\psi} = \frac{\int_0^L X^{\prime\prime} X dx}{\int_0^L X^{\prime\prime} dx} \quad (9-b)$$

$$a_{\varphi} = \int_0^L X^{\prime\prime} dx, r = \sqrt{I/A}$$

در این رابطه  $r$  شعاع ژیراسیون است. سپس طرفین معادله (۹-الف) را در  $T'$  ضرب شده و نسبت به متغیر زمان انتگرال گرفته می شود. در اینجا شرایط اولیه صفر است. ( $t=0, T=T'=0$ ). در نتیجه رابطه زیر به دست می آید.

$$\left( \frac{dT}{dt} \right)^{\prime\prime} = \chi_1 (1-T^{\prime\prime}) + \frac{\chi_2}{\psi} (1-T^{\prime\prime}) \quad (10-الف)$$

$$\chi_1 = \left( \frac{EI}{\rho A} a_{\varphi} - \frac{\tau^{\circ} b}{\rho A} a_{\psi} \right) \quad (10-b)$$

$$\chi_2 = -\frac{Cl}{\rho A} \left( \frac{a}{r} \right)^{\prime\prime} a_1 a_2$$

به منظور حل رابطه (۱۰-الف) با استفاده از تابع بیضوی ژاکوبی، پارامترهای زیر تعریف می شود.

$$p^{\prime\prime} = \chi_1 + \chi_2 \quad (11-الف)$$

$$k^{\prime\prime} = \frac{\chi_2}{\psi p^{\prime\prime}} \quad (11-b)$$

با جایگذاری پارامترهای بالا، در معادلات (۱۰-الف) معادلات زیر نتیجه می شود:

$$\left( \frac{dT}{dt} \right)^{\prime\prime} = p^{\prime\prime} (1-k^{\prime\prime} - (1-2k^{\prime\prime})T^{\prime\prime} - k^{\prime\prime}T^{\prime\prime}) \quad (12-الف)$$

$$\left( \frac{dT}{d(t)} \right)^{\prime\prime} = (1-T^{\prime\prime})(k^{\prime\prime}T^{\prime\prime} - k^{\prime\prime} + 1) \quad (12-b)$$

توابع بیضوی ژاکوبی [۱۹] تعریف شده در معادله (۱۱-ب) با مدول  $k$ ، را می توان با فرض  $T = \cos \theta$  به صورت زیر به دست آورد:

$$pt = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^{\prime\prime} \sin^2 \theta)}} \quad (13)$$

به طوری که  $\Delta \sigma_{ij}$  پرش تنش در طول سطوح میان صفحه ای،  $n_i$  بردار واحد عمود بر سطح، و  $K$  تنسور انحنا است. در تغییر شکلهای کوچک در حالت خمشی در راستای  $z$ ، پرش تنش تعریف شده در رابطه (۳)، منجر به نیروی گسترده در طول نانولوله می شود.

$$p(x) = H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

به طوری که  $w$  جابه جایی عرضی نانولوله، و  $H$  یک پارامتر ثابت است [۱۷] که طبق رابطه زیر تعریف می شود.

$$H = \tau^{\circ} (R_o + R_i) \quad (5)$$

مولفه های جابه جایی در راستای  $x$  و  $z$  بترتیب به صورت زیر در نظر گرفته می شوند.

$$u(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6-الف)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (6-b)$$

با استفاده از اصل همیلتون [۱۸] و همچنین با در نظر گرفتن الاستیسیته سطحی و تنش باقیمانده سطحی، ارتعاشات غیر خطی نانولوله، با فرض ناچیز بودن نیروی اینرسی افقی نسبت به نیروی اینرسی عرضی، به شکل زیر به دست می آید.

(۷-الف)

$$(EI)^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$C = \frac{EA}{2L} + \frac{E_s \pi}{L} \times (R_o + R_i) \quad (7-b)$$

$$(EI)^* = EI + E_s \pi (R_o^2 + R_i^2) \quad (7-c)$$

به طوری که  $E$  مدول یانگ قسمت عمده (بالک) نانولوله،  $I = \pi(R_o^4 - R_i^4)/4$  اینرسی سطح مقطع،  $\rho$  نشان دهنده چگالی، و  $A = \pi(R_o^2 - R_i^2)$  مساحت سطح مقطع نانولوله است. روابط (۷) نشان می دهد که الاستیسیته سطحی و تنش باقیمانده سطحی به طور مستقیم بر رفتار غیر خطی نانولوله تأثیرگذارند. در حالت غیرخطی تابع جابه جایی به صورت زیر فرض می شود:

$$w(x, t) = aX(x)T(t) \quad (8)$$

به طوری که  $a$  نشان دهنده دامنه تغییر شکل،  $X(x)$  شکل مود خطی شماره  $i$ -ام ( $i = 1, 2, \dots$ ) و  $T(t)$  تابعی از زمان است. با جایگذاری رابطه (۸) و مشتقات آن در معادله غیرخطی

در مثالها، از جهت [۱۱۱] استفاده شده است. حال با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده به صورت زیر:

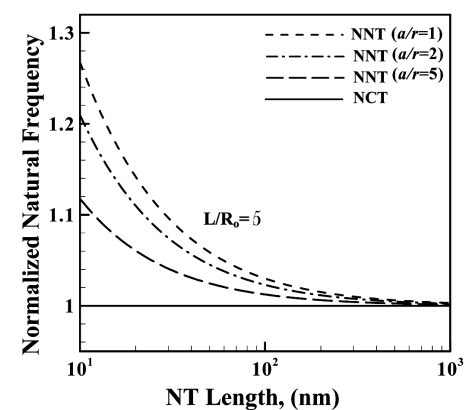
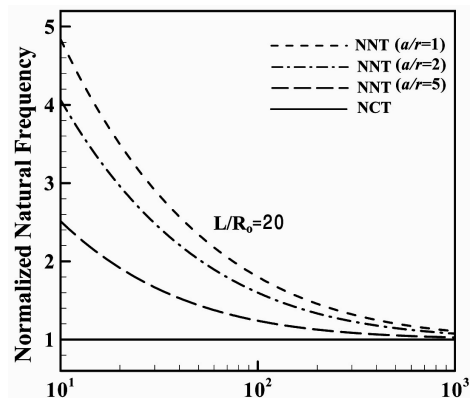
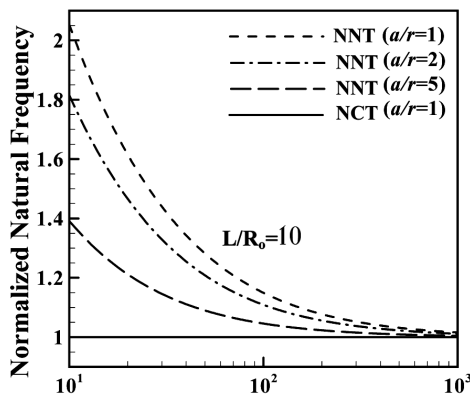
$$w(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \text{ at } x = 0, L \quad (17)$$

شکل مودها را به صورت زیر است:

$$X_i(x) = a_i \sin(\beta_i x) \quad (18\text{-الف})$$

$$\beta_i = \frac{i\pi}{L}, (i = 1, 2, \dots) \quad (18\text{-ب})$$

که در آنها  $a_i$  نشان دهنده مود  $i$  ام است.



شکل (۲) اثرات سطحی بر فرکانس بی بعد طبیعی غیرخطی نانو لوله.

با استفاده از فرم معکوس معادله (۱۳)،  $T$ ، به صورت تابعی از توابع بیضوی ژاکوبی، به فرم زیر به دست می آید:

$$T = cn[pt, k] \quad (14)$$

به ازای مقادیر حقیقی  $p$  و  $k^2$  بین ۰ و ۱، مقادیر توابع بیضوی ژاکوبی نیز حقیقی خواهند بود. اگر  $\chi_2 = 0$  باشد اثرات غیرخطی از بین رفته و خواهیم داشت  $k^2 = 0$  همچنین توابع بیضوی ژاکوبی به توابع اصلی مثلثاتی  $\cos pt$  با دوره تناوب  $2\pi$  تبدیل می شوند و حرکت ارتعاشی نانو لوله هارمونیک است. اما به ازای  $k^2 = 1$  توابع بیضوی ژاکوبی به توابع اصلی مثلثاتی  $\text{sech } pt$  تبدیل می شوند و حرکت ارتعاشی نانو لوله، غیرنوسانی است که با گذشت زمان به صورت مجانبی به حالت مستقیم خود همگرا می شود. دوره تناوب تابع  $cn[pt, k]$ ،  $4K$  است و توسط انتگرال کامل بیضوی به صورت زیر تعریف می شود.

$$4K = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (5)$$

عبارت زیر فرکانس غیرخطی را ارائه می کند.

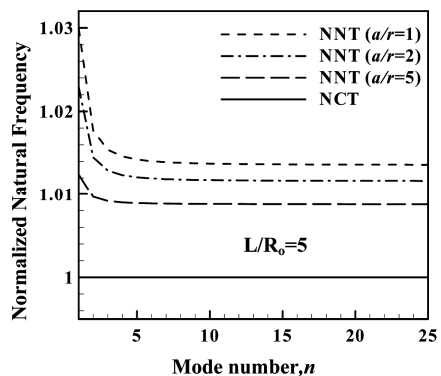
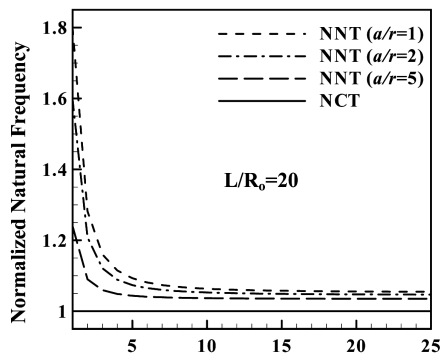
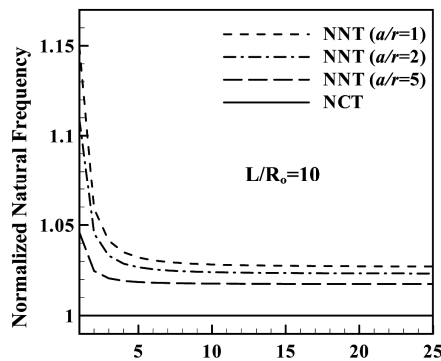
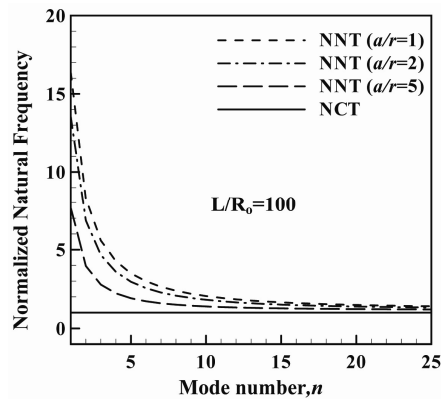
$$\omega_{ni} = \frac{\pi \sqrt{\chi_1 + \chi_2}}{2K} \quad (16)$$

### ۳- نتایج عددی

در این قسمت به منظور نشان دادن اثرات سطحی بر روی رفتار نانو لوله با شرایط تکیه گاهی ساده، چند مثال عددی ارائه شده است. میلر و شنوی [۲۰] و شنوی [۲۱] با به کارگیری روش اتمی جاسازی شده ثوابت الاستیک سطح را تعیین کردند. نتایج آنها تأیید کرد که ثوابت الاستیک سطح به نوع ماده و جهت کریستالی سطح بستگی دارد. برای مثال برای آلومینیوم با مدول یانگ  $E = 70 \text{ GPa}$ ، ضریب پواسون  $\nu = 0.3$ ، و چگالی  $\rho = 2700$  و جهت کریستالی [۱۰۰]، چنین خواص سطحی را خواهیم داشت:

$$\tau^0 = 0.5689 \text{ N/m} \text{ و } E_S = -7.9253 \text{ N/m}$$

در حالی که این مقادیر برای جهت کریستالی [۱۱۱] برابر  $\tau^0 = 0.9108 \text{ N/m}$  و  $E_S = -5.1882 \text{ N/m}$  خواهند بود.



شکل (۳) اثرات عدد مود بر روی فرکانس بی بعد طبیعی غیر خطی نانولوله با اثرات سطحی.

شکل (۲) نمایش دهنده تغییرات فرکانس طبیعی غیر خطی نانولوله به ازای مقادیر مختلف  $\frac{L}{R_0} = 5, 10, 20, 100$  بر حسب

طول  $10\text{nm} \leq L \leq 1000\text{nm}$  نانولوله است. حل ها بر اساس

لوله کلاسیک غیر خطی را با NCT و نتایج با اثرات سطحی را با NNT نمایش می دهیم. همچنین نتایج فرکانسها را با حالات کلاسیک خود بی بعد کرده ایم. در تمامی نتایج فرض شده که

$t = \frac{R_0}{5}$  است. مشاهده می شود که با افزایش طول اثرات

سطح کاهش می یابد. همچنین در دامنه های کمتر اثرات سطح

بیشتر شده به طوری که بیشترین تغییرات در فرکانس طبیعی در

$a/r = 1$  مشاهده می شود. این اثرات ناشی از این حقیقت اند

که اثرات مقیاس کوچک در ابعاد بزرگتر کمتر غالب شده و

لذا تمامی منحنیها در ابعاد بزرگتر به حالت کلاسیک خود

همگرا می شوند. نتایج حاصل برای چهار مقدار متفاوت

در نظر گرفته شده برای  $\frac{L}{R_0}$  نیز این حقیقت را تأیید می کنند.

مشاهده می شود که با افزایش ضخامت نانولوله اثرات سطحی

کاهش یافته و به طوری که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای

شکل اول دیده می شوند زیرا کمترین ابعاد را دارد. لازم به ذکر

است که تمامی فرکانسهای طبیعی نسبت به حالت کلاسیک

خود بی بعد شده اند.

در شکل (۳) اثرات سطح بر فرکانسهای بی بعد غیر خطی نانو

لوله با طول  $L = 100\text{nm}$  و به ازای مقادیر مختلف  $\frac{L}{R_0}$

بررسی شده است. نتیجه جالب دیگر، همانطور که در مقالات

پیشین دیده شده است، کاهش اثر سطح در فرکانسهای بالاتر

می باشد. ملاحظه می شود که با افزایش شماره مود ارتعاشی

فرکانس نرمال شده به حالت کلاسیک خود همگرا می شود.

در این نیز حالت مشاهده می شود با افزایش ضخامت نانولوله

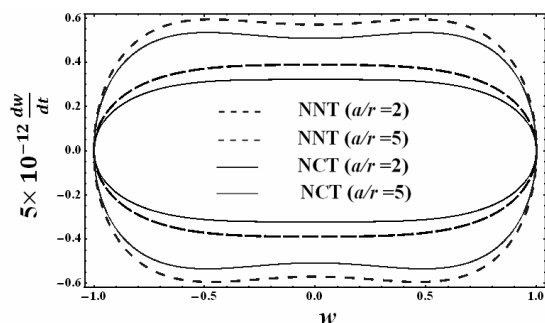
اثرات سطحی کاهش یافته و به طوری که بیشترین مقدار

فرکانس طبیعی برای شکل اول دیده می شوند و نتیجه قبلی را

تأیید می کند.

در شکل (۴)، مشاهده می‌شود که اثرات سطح در مقادیر کمتر  $a/r$  مشهودترند و نشان از آن است که حساسیت بیشتری به اثرات سطح در دامنه های کمتر وجود دارد. دوباره مشاهده می‌شود، مانند شکل قبل، که با افزایش مود ارتعاشی اثرات سطحی کاهش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود که کاهش اثرات سطحی در فرکانسهای کمتر بسیار چشمگیر تر از فرکانسهای بالاتر است.

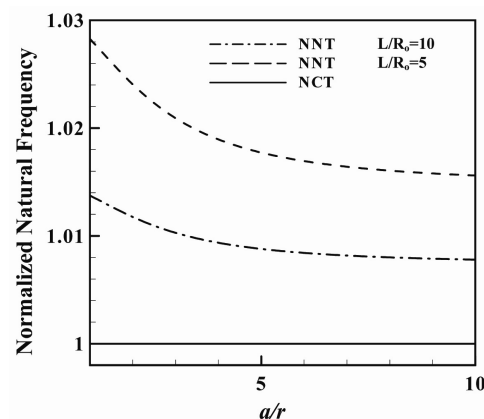
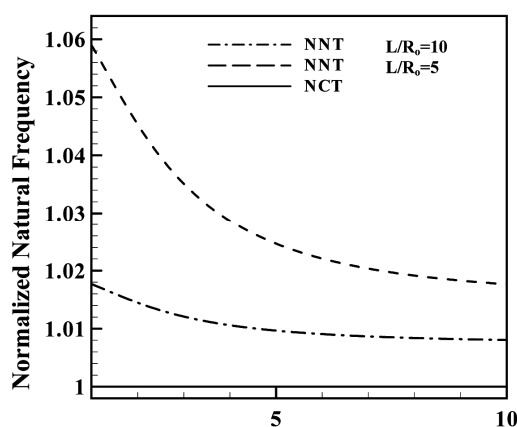
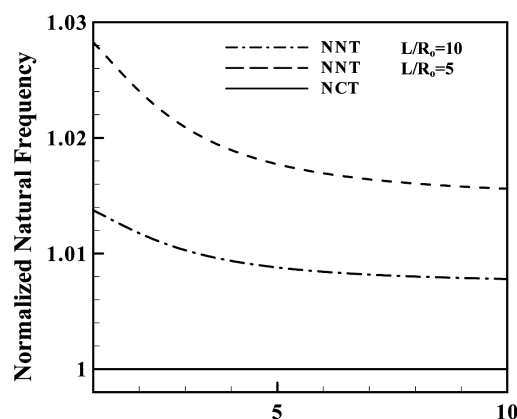
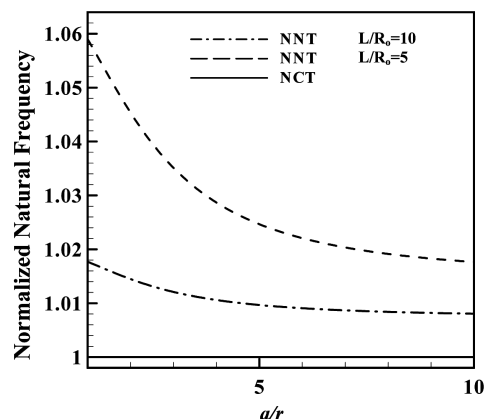
بررسی اثرات غیر خطی بر روی منحنی فاز، که نمایش دهنده جابه‌جایی بر حسب سرعت است، آسانتر است. بنابراین در نمودار شکل (۵)، به بررسی اثرات سطح بر روی منحنی فاز در مرکز نانو لوله  $x = 0.5L$  با طول  $L = 50nm$  و دو مقدار برای  $a/r$  پرداخته شده است. مشاهده می‌شود که برای مقادیر کوچکتر  $a/r$  منحنی بسته، متقارن و دارای یک مرکز (بیضی شکل) است. اما برای مقادیر بزرگ برای  $a/r$  منحنی بسته و با دو مرکز (دوکی شکل) ایجاد می‌شود. اثرات سطحی نیز در این نمودار به خوبی نشان دهنده تأثیر مهم این پارامتر در نانو لوله ها دارد.



شکل (۵) اثرات سطحی بر روی نمودار فاز.

#### ۴- نتیجه گیری

در این بررسی ما به مطالعه اثرات سطح بر روی ارتعاشات غیرخطی نانو لوله بر مبنای تیوری تیر اوپلر- برنولی و هندسه فون کارمن پرداختیم. چند پارامتر از جمله طول،  $a/r$  و اثرات سطح بر روی منحنی فاز بررسی شده‌اند. در ابتدا تغییرات فرکانس طبیعی غیر خطی نانو لوله به ازای مقادیر مختلف نسبت طول به شعاع بر حسب طول نانو لوله بررسی شد. مشاهده می‌شود که با افزایش طول اثرات سطح کاهش می‌یابد. همچنین در دامنه‌های



ادامه شکل (۴) اثر نسبت  $a/r$  بر روی فرکانس بی‌بعد طبیعی غیرخطی نانو لوله با اثرات سطحی.

$n_i$	بردار واحد عمود بر سطح
$\kappa$	تنسور انحنای
$w$	جابه‌جایی عرضی نانولوله
$E$	مدول یانگ قسمت بالک
$I$	اینرسی سطح مقطع
$\rho$	چگالی
$A$	مساحت سطح مقطع نانولوله
$X(x)$	شکل مود خطی
$r$	شعاع ژیراسیون

### مراجع

- [1] Fennimore A.M., Yuzvinsky T.D., Han W.Q., Fuhrer M.S., Cumings J., Zettl A., Rotational actuators based on carbon nanotubes, *Nature*, 424, 2003, pp. 408-410.
- [2] Williams P.A., Papadakis S.J., Patel A.M., Falvo M.R., Washburn S., Superfine R., Fabrication of nanometer-scale mechanical devices incorporating individual multiwalled carbon nanotubes as torsional springs, *Applied Physics Letters*, 82, 2003, pp. 805-807.
- [3] Papadakis S.J., Hall A.R., Williams P.A., Vicci L., Falvo M.R., Superfine R., Washburn S., Resonant oscillators with carbon-nanotube torsion springs, *Physics Review Letters*, 93, 2004, pp. 1461011, 1461014.
- [4] Williams P.A., Papadakis S.J., Patel A.M., Falvo M.R., Washburn S., Superfine R., Torsional response and stiffening of individual multiwalled carbon nanotubes, *Physics Review Letters*, 89, 2002, pp. 2555021-2555025.
- [5] Lagowski J., Gatos H.C., Sproles Jr E.S., Surface stress and the normal mode of vibration of thin crystals: GaAs, *Applied Physics Letters*, 26, 1975, pp. 493-495.
- [6] Sader J. E., Surface stress induced deflections of cantilever plates with applications to the atomic force microscope: rectangular plates, *Journal of Applied Physics*, 89, 2001, pp. 2911-2921.

کمتر اثرات سطح بیشتر شده بطوریکه بیشترین تغییرات در فرکانس طبیعی در  $a/r=1$  مشاهده می‌شود. این اثرات ناشی از این حقیقت می‌باشند که اثرات مقیاس کوچک در ابعاد بزرگتر کمتر غالب شده و لذا تمامی منحنیها در ابعاد بزرگتر به حالت کلاسیک خود همگرا می‌شوند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت نانولوله اثرات سطحی کاهش یافته است. در ادامه اثرات سطح بر روی فرکانسهای بی بعد غیر خطی نانولوله به ازای مقادیر مختلف  $\frac{L}{R_0}$  بررسی شد. کاهش اثر سطح در فرکانسهای بالاتر ملاحظه می‌شود. با افزایش شماره مود ارتعاشی فرکانس نرمال شده به حالت کلاسیک خود همگرا می‌شود. با افزایش ضخامت نانولوله اثرات سطحی کاهش یافته و بطوریکه بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای شکل اول دیده می‌شوند. در ادامه، مشاهده می‌شود که اثرات سطح در مقادیر کمتر  $a/r$  مشهودترند و نشان از آن است که حساسیت بیشتری به اثرات سطح در دامنه‌های کمتر وجود دارد. ملاحظه می‌شود که کاهش اثرات سطحی در فرکانسهای کمتر بسیار چشمگیر تر از فرکانسهای بالاتر است. مشاهده می‌شود که برای مقادیر کوچکتر  $a/r$  منحنی فاز منحنی بسته و مقارن و با یک مرکز، اما برای مقادیر بزرگ برای  $a/r$  منحنی بسته و با دو مرکز ایجاد می‌شوند.

### ۵- فهرست علائم

$L$	طول نانولوله
$R_i$	شعاع داخلی نانولوله
$R_o$	شعاع خارجی نانولوله
$t$	ضخامت نانولوله
$\sigma_{\alpha\beta}^3$	تانسور تنش سطحی
$\varepsilon_{\alpha\beta}^3$	تانسور کرنش سطحی
$\delta_{\alpha\beta}$	دلتای کرونیگر
$\tau^\circ$	نشان دهنده تنش سطحی
$E^3$	مدول الاستیک سطح
$\varepsilon$	کرنش
$\Delta\sigma_{ij}$	پرش تنش در طول سطوح میان صفحه‌ای

- [17] Wang G.F., Feng X.Q., Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams, *Applied Physics Letters*, 90, 2007, pp. 231904.
- [18] Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S., An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams, *Meccanica*, 45, 2009, pp. 743-752.
- [19] Byrd P.F., Friedman M.D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer, Berlin, 1991.
- [20] Miller R.E., Shenoy V.B., Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements, *Nanotechnology*, 11, 2000, pp. 139-147.
- [21] Shenoy V.B., Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces, *Phys. Rev. B* 71, 2005, pp. 0941041-09410411.
- [7] Lee J.H., Kim T. S., Yoon K. H., Effect of mass and stress on resonant frequency shift of functionalized Pb(Zr<sub>0.52</sub>Ti<sub>0.48</sub>)O<sub>3</sub> thin film microcantilever for the detection of C-reactiveprotein, *Applied Physic Letters*, 84, 2004, pp. 3187-3189.
- [8] He J., Lilley C.M., Surface Effect on the Elastic Behavior of Static Bending Nanowires, *Nano Letters*, 2008, pp. 1798-1802.
- [9] Wang G.F, Feng X.Q., Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams, *Applied Physic Letters*, 90, 2007, pp. 2319041-2319044.
- [10] Abbasian S., Rafsanjani A., Avazmohammadi R., Farshidianfar A., Free vibration of microscaled Timoshenko beams, *Applied Physic Letters*, 95, 2009, pp. 1431221-1431224.
- [11] Zhang Y.Y., Wang C.M., Tan V.B.C., Assessment of Timoshenko beam models for vibrational behaviour of single-walled carbon nanotubes using molecular dynamics, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 1, 2009, pp. 89-106.
- [12] Fu Y. M., Hong J. W., Wang X. Q., Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes, *Journal of Sound and Vibration*, 96, 2006, pp. 746-756.
- [13] Gibbs J. W., The Scientific Papers of J. Willard Gibbs, Vol. 1: Thermodynamics: Longmans and Green, New York, 1906.
- [14] Cammarata R.C., Surface and interface stresses effects in thin films, *Prog. Surf. Sci*, 46, 1994, pp. 1-38 .
- [15] Gurtin ME, Murdoch AI, A continuum theory of elastic material surfaces, *Arch Rat Mech Anal*, 57, 1975, pp. 291-323.
- [16] Gurtin ME, Struthers A., Multiphase thermomechanics with interfacial structure, *Arch Rat Mech Anal*, 112, 1990, PP. 97-160.