

## بررسی کمانش و ارتعاشات تیر ویسکوالاستیک تحت بارهای عرضی گسترده و محوری

حمید رضا اپیک چی<sup>۱\*</sup>، حمیده صدیقی<sup>۲</sup>

\* نویسنده مسئول: eipakchi @ shahroodut.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

ارتعاش تیر ویسکوالاستیک، کمانش تیر ویسکوالاستیک، روش بسط توابع ویژه، بارگذاری عرضی و محوری.

### چکیده

در این مقاله به بررسی پاسخ دینامیکی تیر ویسکوالاستیک و بار کمانش آن تحت بارهای عرضی و محوری به کمک مدل‌های کلونین و استاندارد خطی پرداخته شده است. معادلات حاکم بر اساس دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو استخراج شده و حل تحلیلی آنها به کمک بسط توابع ویژه به دست آمده است. بار کمانش و پاسخ براساس تئوریهای اویلر-برنولی و تیموشنکو و مدل‌های کلونین و استاندارد خطی محاسبه و با نتایج حالت الاستیک مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد مدل سازی تیر ویسکوالاستیک با تیر الاستیک در استهلاک‌های متوسط، تقریب ضعیفی است. همچنین، پارامتر استهلاک به صورت صریح در تعیین بار کمانش ظاهر نمی‌شود ولی بار کمانش تیر ویسکو الاستیک، ۵۰٪ بیش از تیر الاستیک است.

۱- استادیار دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.

## ۱- مقدمه

تئوری تیر اوپلر- برنولی یک ساده‌سازی از تئوری الاستیسیته خطی است که به محاسبه تغییر شکل کوچک تحت بار عرضی می‌پردازد. در این تئوری خیز تمام لایه‌های تیر با خیز صفحه خنثی یکسان است. در تیر تیموشنکو علاوه بر خیز صفحه خنثی، چرخش صفحات نیز مدل‌سازی می‌شود. بر اساس این تئوری، مقاطع مسطح که ابتدا عمود بر محور خنثی بوده‌اند پس از تغییر شکل مسطح باقی مانده ولی لزوماً عمود بر محور خنثی باقی نمی‌ماند. در این تئوری اثر اینرسی دورانی و برش عرضی در فرمول بندی ظاهر می‌شود [۱]. میرسکی و هرمن [۲] تئوری تغییر شکل برشی را معرفی کردند که می‌توان آن را تعمیم تئوری تیر تیموشنکو برای ورقها و پوسته‌ها در نظر گرفت. بابر و همکاران [۳] پاسخ هارمونیک تیر کامپوزیتی با هسته ویسکوالاستیک را تحت بار هارمونیک با روش اجزا محدود تعیین کرده‌اند. بلنسا و جولرمو [۴] با روش FE رفتار خمشی، کمانشی و خزشی تیرهای جدارنازک کامپوزیتی را مطالعه کرده‌اند. گانسان و پرادیپ [۵] پاسخ هارمونیک تیر کامپوزیتی با هسته ویسکوالاستیک تحت بار دمایی را با روش اجزا محدود تعیین کرده‌اند. کواتورک و سیمسک [۶] پاسخ دینامیکی یک تیر تیموشنکوی ویسکوالاستیک که از مدل کلونین تبعیت می‌کند را تحت بار محوری خارج از مرکز و بار عرضی متحرک تعیین کرده‌اند. جابه‌جایی و چرخش به شکل توابع چند جمله‌ای در نظر گرفته شده و بخش زمانی پاسخ با روش عددی نیومارک به دست آمده است. صالحی و انصاری [۷] کمانش تیرهای اوپلر- برنولی و تیموشنکوی ویسکوالاستیک را مطالعه کرده و فرمول‌بندی ریاضی برای تیر اوپلر- برنولی ویسکوالاستیک تحت بار محوری و عرضی متغیر با زمان و برای تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک تحت بار محوری متغیر با زمان را ارائه داده‌اند. معادلات حاکم با روش تفاضل محدود<sup>۳</sup> حل شده است. سونگ و یون [۸] تأثیر برش و نیروی محوری بر ارتعاشات و کمانش یک ستون طویل واقع

بر بستر ویسکوالاستیک تحت بار متحرک با سرعت متغیر را بررسی نموده‌اند. حل مسئله به کمک تبدیل فوریه بی نهایت در فضای فرکانس به دست آمده و تبدیل فوریه معکوس آن با روش تبدیل فوریه سریع<sup>۴</sup> تعیین شده است. محمودی و همکاران [۹] معادله حرکت یک تیر غیرخطی ویسکوالاستیک با دامنه زیاد را استخراج کرده و با روش مقیاسهای چندگانه<sup>۵</sup>، ارتعاشات آزاد آن را بررسی کرده‌اند. گانسان و ستورامان [۱۰] اثر لایه مغناطیسی و هسته ویسکوالاستیک را بر بار کمانش و ارتعاشات آزاد تیر بررسی کرده‌اند. حل به کمک روش اجزا محدود انجام شده است. تحلیل عددی تیرهای ویسکوالاستیک با روش حداقل مربعات و روش نیومارک توسط کیانی و همکاران [۱۱] انجام شده است. تیر موردنظر، چند دهانه<sup>۶</sup> و تحریک آن جرم متحرک بوده و مدل‌سازی تیر بر اساس تئوری تیموشنکو و اوپلر برنولی می‌باشد. مفید و همکاران [۱۲] با یک روند عددی مبتنی بر مدل‌سازی تیر ویسکوالاستیک با مجموعه‌ای از المانهای میله صلب و مفصل، پاسخ دینامیکی تیر را به بار متحرک به دست آورده‌اند. آروین و همکاران [۱۳] ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای کامپوزیتی با هسته ویسکوالاستیک را با روش‌های اجزا محدود و نیومارک مطالعه کرده‌اند.

مرور مقالات مشخص می‌کند که کارهای پیشرفته‌ای در این حوزه انجام شده است. این کارها را می‌توان به کمک تئوریهای پیشرفته‌تری که اثرات غیر خطی، برش عرضی، اینرسی دورانی و ... را در نظر می‌گیرند یا با تعریف بارگذاریهایی دیگر و یا با در نظر گرفتن خواص مکانی برای جنس ماده (FGM) همچنان پیچیده‌تر کرد ولی وجه مشترک بسیاری از این مقالات این است که نتوانسته‌اند هیچ حل تحلیلی برای مسئله ارائه دهند و عمدتاً به روش‌های عددی مانند اجزا محدود متوسل شده‌اند که نتایج آن نیاز به تأیید دارد. در این مقاله تلاش شده است برای تعیین پاسخ و

2- Fast Fourier Transform (FFT)

3- Multiple Scale

4- Multi-span

1- Finite Difference

## ۲-۱ تیر اویلر-برنولی

بر اساس تئوری اویلر برنولی معادله حاکم بر جابه‌جایی عرضی تیر در حالت الاستیک عبارت است از [۱۴]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1)$$

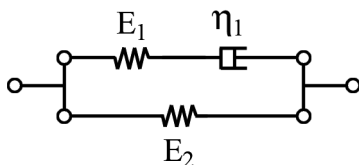
که در آن،  $w(x, t)$  خیز صفحه خنثی و  $E$  مدول الاستیک است. برای یک ماده ویسکوالاستیک با مدل جامد استاندارد خطی، معادله بنیادین به شکل زیر است:

$$p^E \sigma = q^E \varepsilon \quad (2)$$

است که عملگرهای ویسکوالاستیک (شکل ۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۵]:

$$p^E = \eta_1 \frac{d}{dt} + E_1 \quad (3)$$

$$q^E = \eta_1 (E_1 + E_2) \frac{d}{dt} + E_1 E_2$$



شکل (۲) مدل ویسکوالاستیک.

با تفکیک تنش به بخش‌های برشی و فشاری و برای ماده‌ای که رفتار آن در فشار تراکم ناپذیر و در برش ویسکوالاستیک است می‌توان نوشت:

$$E = 3G, \quad G = \frac{1}{2} \frac{q^E}{p^E} \quad (4)$$

که  $G$  مدول برشی است. با جایگذاری روابط (۴) در معادله (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( q^E I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - P \left( p^E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^E (q(x, t)) \quad (5)$$

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p^E w) = p^E (q(x, t))$$

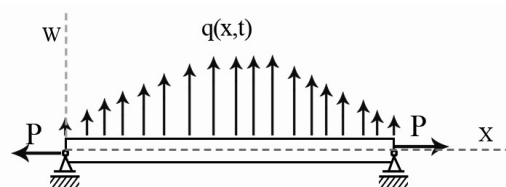
حل معادله فوق، پاسخ تیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک را به بار عرضی و محوری نتیجه می‌دهد.

بار کمانش، از تکنیک‌های ریاضی استفاده شده و حل تحلیلی مسئله ارائه شود.

هرچند مدل‌های تعمیم یافته ویسکوالاستیک مانند سری پرونی، انعکاس دهنده دقیق‌تری از رفتار ماده ویسکوالاستیک هستند ولی پیچیدگی این مدل‌ها محققان را بیشتر به سمت مدل‌های ساده‌تری مشابه مدل‌های کلونین، ماکسول و جامد استاندارد خطی سوق می‌دهد. در این مقاله به بررسی پاسخ دینامیکی تیر بر اساس مدل‌های کلونین و استاندارد پرداخته شده و نتیجه با حالت الاستیک مقایسه شده است. پاسخ دینامیکی تیر با حل تحلیلی معادلات حاکم به کمک بسط توابع ویژه به دست آمده است. محاسبات بر اساس دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو بوده و بارگذاری شامل بار محوری ثابت و بار عرضی متغیر با زمان و مکان است. علاوه بر آن، برای بار کمانش، یک رابطه ریاضی برای تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو با مدل‌های کلونین و استاندارد استخراج شده است. این روابط را نمی‌توان با روش‌های متداول در تحلیل پایداری (مانند روش روث<sup>۱</sup>) به ویژه برای تیر تیموشنکو به دست آورد. همچنین، به کمک تحلیل‌های انجام شده برخی نتایج کیفی در مدل‌سازی تیرهای ویسکوالاستیک که کمتر در مقاله‌ها و کتابها به آن اشاره می‌شود (در بخش نتایج) ارائه شده است.

## ۲-۲ معادلات حاکم

مطابق شکل (۱) یک تیر ویسکوالاستیک با دانسیته  $\rho$ ، طول  $l$ ، سطح مقطع  $A$  و ممان اینرسی  $I$  تحت بار محوری  $P$  و بار عرضی  $q(x, t)$  بر واحد طول مفروض است.



شکل (۱) شماتیک تیر و بارگذاری آن.

$$k_{\gamma} W_n + k_{\gamma} W_n + k_{\gamma} W_n + k_{\circ} W_n \quad (11)$$

$$\frac{\gamma}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

که در آن داریم:

$$k_{\gamma} = \rho A E_{\gamma}, \quad k_{\gamma} = \rho A \eta_{\gamma}$$

$$k_{\gamma} = \left( \frac{\gamma I (E_{\gamma} + E_{\gamma}) n^2 \pi^2}{\gamma l^3} + P \right) \eta_{\gamma} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2$$

$$k_{\circ} = \left( \frac{\gamma E_{\gamma} \ln^2 \pi}{\gamma l^2} + P \right) E_{\gamma} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2$$

$$f(x,t) = \eta_{\gamma} \frac{dq(x,t)}{dt} + E_{\gamma} q(x,t)$$

در رابطه فوق چنانچه  $E_{\gamma} = 0$  و  $E_{\gamma} \neq 0$  باشد پاسخ تیر بر اساس مدل ماکسول و به ازای  $E_{\gamma} \rightarrow \infty$  و  $E_{\gamma} \neq 0$  پاسخ تیر برای مدل کلومین به دست می آید و  $\eta_{\gamma} = 0$  پاسخ الاستیک را نتیجه می دهد.

### ۲-۳ تیر تیموشکو

شرایط مرزی برای تیر با تکیه گاه ساده با توجه به صفر بودن خیز و ممان (رابطه ۸) به صورت زیر است:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (12)$$

لذا خیز و چرخش تیر به صورت:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

در نظر گرفته می شود. با جایگذاری در معادلات (۱۰) نتیجه می شود:

$$[A_{\gamma}] \{\ddot{w}_{\gamma}\} + [A_{\gamma}] \{\dot{w}_{\gamma}\} + [A_{\gamma}] \{w_{\gamma}\} + [A_{\circ}] \{w_{\gamma}\} = \{B\} \quad (13)$$

که ماتریس های ضرایب عبارت اند از:

$$[A_{\gamma}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \rho I E_{\gamma} \\ \gamma \rho A E_{\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{\gamma}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \rho I \eta_{\gamma} \\ \gamma \rho A \eta_{\gamma} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{\gamma}] = \begin{bmatrix} a_{\gamma 1} & a_{\gamma 2} \\ a_{\gamma 1} & a_{\gamma 2} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [A_{\circ}] = \begin{bmatrix} b_{\gamma 1} & b_{\gamma 2} \\ b_{\gamma 1} & b_{\gamma 2} \end{bmatrix}$$

$$a_{\gamma 1} = (\gamma P - KA(E_{\gamma} + E_{\gamma})) \eta_{\gamma} \frac{n\pi}{l}$$

$$a_{\gamma 2} = (-KA + \frac{\gamma I n^2 \pi^2}{l^2}) \eta_{\gamma} (E_{\gamma} + E_{\gamma})$$

### ۲-۲ تیر تیموشکو

از دیگرام آزاد یک المان تیر بر اساس تئوری تیموشکو می توان نوشت [۱۴]:

$$\frac{dV}{dx} = -\rho A \ddot{w} + q(x,t) \quad (6)$$

$$V = \frac{dM}{dx} - P \frac{dw}{dx} - \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (7)$$

که در آن نیروی برشی،  $w$  خیز صفحه خشی،  $M$  ممان خمشی،  $\varphi$  چرخش مقطع و  $K$  ضریب تصحیح برشی است. رابطه ممان و نیروی برشی با خیز و چرخش به شکل زیر است [۱۴]:

$$M = EI \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V = KAG \left( \Phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (8)$$

از روابط (۶) تا (۸) نتیجه می شود:

$$KAG \left( \Phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + P \frac{\partial w}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ KAG \left( \Phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t)$$

به کمک رابطه (۴)، معادلات (۹) برای ماده ویسکوالاستیک به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$\frac{1}{\gamma} KA \left[ q^E \left( \Phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + P \frac{\partial}{\partial x} (p^E w) + \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p^E \varphi) - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( q^E I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p^E w) - \frac{1}{\gamma} KA \frac{\partial}{\partial x} \left[ q^E \left( \Phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = p^E (q(x,t))$$

### ۳- تعیین پاسخ تیر

تکیه گاه تیر، ساده و رفتار آن در برش مطابق مدل استاندارد خطی در نظر گرفته می شود.

### ۳-۱- تیر اویلر-برنولی

به کمک بسط توابع ویژه، با جایگزینی

$$w(x,t) = \sum_n W_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

می شود:

از معادله (۱۴) به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که مدل ماکسول نمی‌تواند بار کمانش در تیر اویلر-برنولی را پیش‌بینی کند و بار کمانش بر اساس مدل‌های کلونین و استاندارد یکسان است و به  $\eta_1$  وابسته نیست. بار بحرانی در حالت الاستیک بر اساس روابط مقاومت مصالح عبارت است از:

$$P_{Cr} = -\frac{\pi^2 E_\gamma I}{l^2} \quad (16)$$

مدول الاستیسیته در حالت الاستیک با تعمیم مدل استاندارد برای ضریب ویسکوزیته صفر برابر  $E_\gamma$  است.

#### ۴-۲- تیر تیموشنکو

برای تعیین بار بحرانی، معادله مشخصه (دترمینان ماتریس ضرایب) در حوزه لاپلاس با شرایط اولیه صفر، مساوی صفر در نظر گرفته می‌شود:

$$K_\phi S^6 + K_\delta S^5 + K_\psi S^4 + K_\chi S^3 + K_\tau S^2 + K_1 S + K_0 = 0 \quad (17)$$

ضرایب معادله به پارامترهای مسئله وابسته است. بار بحرانی بنا بر قانون تغییر علامت‌ها عبارت است از:

$$P_{Cr} = -\frac{3 \pi^2 E_\gamma I}{2 l^2} \quad (18)$$

در این حالت نیز مدل ماکسول نمی‌تواند بار کمانش را پیش‌بینی کند و بار کمانش بر اساس مدل‌های کلونین و استاندارد یکسان است و به  $\eta_1$  وابسته نیست. در حالت الاستیک، معادله مشخصه (۱۷) به شکل:

$$K_\phi S^4 + K_\tau S^2 + K_0 = 0 \quad (19)$$

تبدیل شده و بار بحرانی همان رابطه (۱۶) خواهد بود. یعنی اولین بار کمانش (در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک) بر اساس هر دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو یکسان است.

#### ۵- مطالعه اثر تغییر پارامترها بر پاسخ

برای بررسی اثر پارامترهای مدل بر رفتار تیر، روابط ذکر شده در بخش‌های قبل به کمک نرم‌افزار MAPLE برای موارد خاص محاسبه شده است. مشخصات تیر مطابق جدول (۱) است. بار عرضی تیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q(x,t) = \frac{4}{L^2} Q_0 x(L-x) \sin(K_1 t) \quad (20)$$

$$a_{\gamma 1} = KA \eta_1 (E_1 + E_\gamma) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$a_{\gamma 2} = -KA \eta_1 (E_1 + E_\gamma) \frac{n\pi}{l}$$

$$b_{11} = (-KA E_\gamma + \gamma P) E_1 \frac{n\pi}{l}$$

$$b_{12} = \left(\frac{\gamma I n^2 \pi^2}{Al^2} + K\right) E_1 E_\gamma A$$

$$b_{21} = KA E_1 E_\gamma \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ و } b_{22} = KA E_1 E_\gamma \frac{n\pi}{l}$$

$$\{B\} = \left\{ \frac{\gamma}{l} \int_0^l f_1(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}$$

$$f_1(x,t) = \gamma \eta_1 \frac{dq(x,t)}{dt} + \gamma E_1 q(x,t)$$

$$\{w_1\} = \begin{Bmatrix} a_n(t) \\ b_n(t) \end{Bmatrix}$$

از این روابط مشابه حالت قبل می‌توان پاسخ را برای تیرهای الاستیک و ویسکوالاستیک (مدل استاندارد، کلونین، ماکسول) به دست آورد.

#### ۴- تعیین بار کمانش

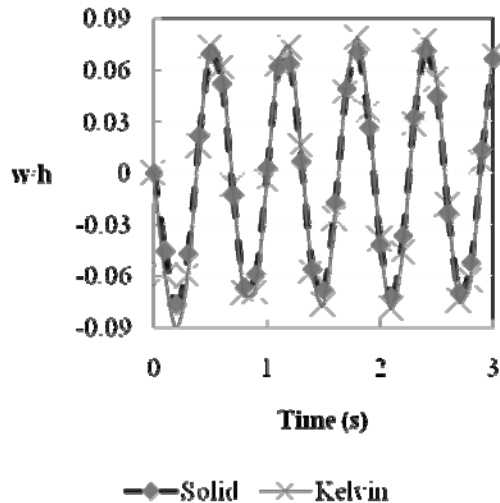
##### ۴-۱- تیر اویلر-برنولی

معادله تیر در حالت همگن در حوزه لاپلاس با شرایط اولیه صفر عبارت است از:

$$\rho A \eta_1 S^3 + \rho A E_1 S^2 + \left[ \frac{\gamma I (E_1 + E_\gamma) n^2 \pi^2}{2 l^2} + P \right] \eta_1 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 S + \left[ \frac{\gamma I E_\gamma n^2 \pi^2}{2 l^2} + P \right] E_1 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = 0 \quad (14)$$

که  $S$  پارامتر تبدیل لاپلاس است. برای پایداری سیستم، لازم است معادله فوق، ریشه مثبت نداشته باشد. بر اساس قاعده تغییر علامت ضرایب معادله مشخصه<sup>۹</sup>، تعداد ریشه‌های مثبت معادله برابر با تعداد تغییر علامت‌ها در ضرایب معادله است. کوچکترین مقدار  $P$  (مدول کمانش) که به تغییر علامت ضرایب معادله منجر می‌شود عبارت است از:

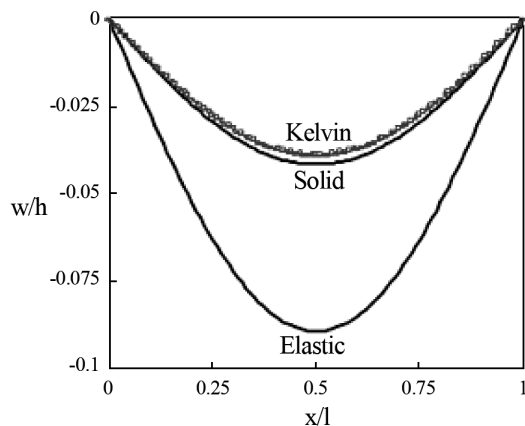
$$P_{Cr} = -\frac{3 \pi^2 E_\gamma I}{2 l^2} \quad (15)$$



شکل (۴) پاسخ تیر تیموشنکوی ویسکوالاستیک بر حسب زمان به بار عرضی و محوری- مدل‌های استاندارد و کلوین ( $\eta_1 = 0.25 \times 10^9 Pa.s$ ).

### ۲-۵ بررسی خیز تیر بر حسب مکان

شکل‌های (۵) و (۶) به ترتیب پاسخ نقاط مختلف تیر را در یک زمان خاص بر اساس تئوری‌های اویلر-برنولی و تیموشنکو نشان می‌دهند. فاصله در امتداد تیر نسبت به طول تیر بی بعد شده است. اختلاف بین مدل‌های کلوین و استاندارد کم است ولی اختلاف فاحشی بین مدل‌های ویسکوالاستیک و الاستیک وجود دارد.



شکل (۵) پاسخ بر حسب طول تیر در  $t = 2s$  برای مدل‌های کلوین (نمودار بالایی)، استاندارد (نمودار میانی) و الاستیک (نمودار پایینی) بر اساس تئوری اویلر ( $\eta_1 = 0.25 \times 10^9 Pa.s$ ).

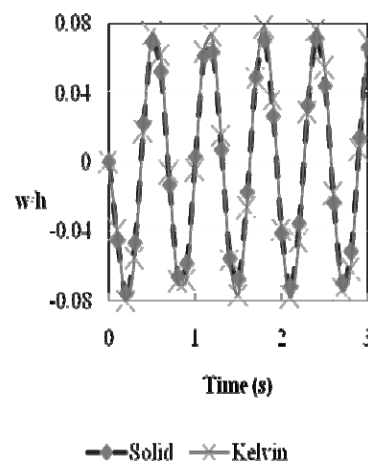
که  $Q_0 = 400 (N/m)$  و  $K_1 = 10 (rad/s)$  است. بار محوری نیز در نمودارهای رسم شده  $P = 100 (N)$  فرض شده است.

جدول (۱) مشخصات تیر.

مقدار	کمیت
$l = 0.5 (m)$	طول
$0.04 (m)$	پهنا
$h = 0.02 (m)$	عمق
$\rho = 0.22 (kg/m^3)$	دانسیته
$K = 0.83$	ضریب برشی
$E_1 = 1 \times 10^{10} (Pa)$	مدول برای مدل استاندارد
$E_2 = 0.33 \times 10^{10} (Pa)$	
$E_3 = 0.33 \times 10^{10} (Pa)$	مدول برای مدل کلوین

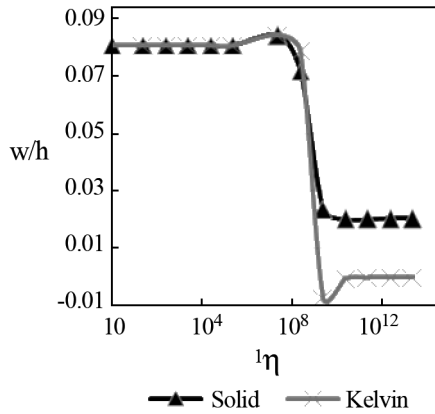
### ۱-۵ بررسی پاسخ زمانی تیر

شکل (۳) پاسخ یک تیر اویلر-برنولی را به بارگذاری عرضی و محوری نشان می‌دهد. دیده می‌شود پاسخ تیر ویسکوالاستیک اویلر-برنولی بر اساس این دو مدل تقریباً یکسان و اختلاف آنها ناچیز است. در این نمودار، جابه‌جایی بر حسب ضخامت تیر بی بعد شده است. در شکل (۴) پاسخ این تیر با تئوری تیموشنکو رسم شده است. نتایج با هر دو مدل کلوین و استاندارد تقریباً یکسان است و اختلاف زیادی بین این دو مدل مشاهده نمی‌شود.



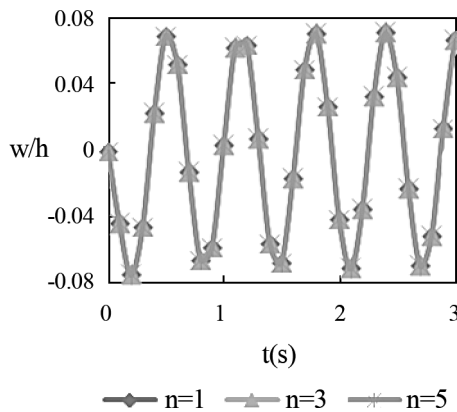
شکل (۳) پاسخ تیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک بر حسب زمان به بار عرضی و محوری- مدل‌های استاندارد و کلوین

( $\eta_1 = 0.25 \times 10^9 Pa.s$ )

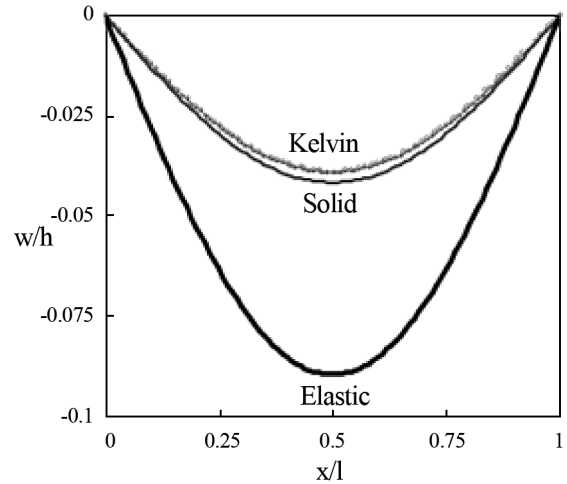


شکل (۸) جابه‌جایی وسط تیر در  $t = 1/16s$  به ازای ضرایب مختلف استهلاک برای مدل‌های کلونین و استاندارد بر اساس تئوری تیموشنکو.

همچنین در استهلاک‌های خیلی زیاد، مثلاً بزرگتر از  $1 \times 10^9 Pa.s$ ، با افزایش استهلاک، خیز تقریباً ثابت می‌ماند ولی در محدوده میانی تغییر استهلاک منجر به تغییرات زیاد در پاسخ می‌شود. این محدود در موارد بررسی شده حدود  $10^6 (Pa.s)$  تا  $10^{10} (Pa.s)$  است. علاوه بر آن، جابه‌جایی بر اساس مدل‌های کلونین و استاندارد، فقط برای استهلاک‌های خیلی زیاد اختلاف قابل توجهی پیدا می‌کنند. زمان  $t = 1/16 s$  یک زمان انتخابی است ولی در بیشتر مقادیر استهلاک این زمان متناظر با خیز ماکزیمم در نمودار پاسخ است.



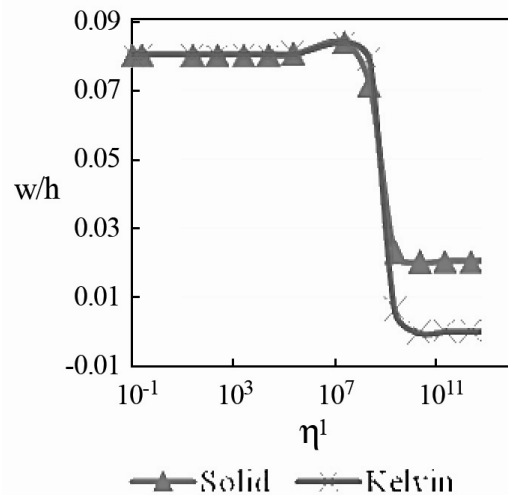
شکل (۹) نمودار همگرایی پاسخ (جابه‌جایی وسط تیر) بر اساس مدل استاندارد- تئوری تیموشنکو ( $\eta_1 = 0.25 \times 10^9 Pa.s$ ) به ازای تعداد متفاوت جملات سری.



شکل (۶) پاسخ بر حسب طول تیر در  $t = 2s$  برای مدل‌های کلونین (نمودار بالایی)، استاندارد (نمودار میانی) و الاستیک (نمودار پایینی) بر اساس تئوری تیموشنکو ( $\eta_1 = 0.25 \times 10^9 Pa.s$ ).

### ۳-۵ بررسی اثر استهلاک بر جابه‌جایی

در شکل‌های (۷) و (۸) اثر استهلاک بر جابه‌جایی نشان داده شده است. در استهلاک‌های تقریباً پایین، مثلاً کمتر از  $1 \times 10^6 Pa.s$ ، پاسخ را می‌توان تقریباً الاستیک فرض کرد.



شکل (۷) جابه‌جایی وسط تیر در  $t = 1/16 s$  به ازای ضرایب مختلف استهلاک برای مدل‌های کلونین و استاندارد بر اساس تئوری اوپلر- برنولی.

$G (Pa)$	مدول برشی	نمودارهای رسم شده با در نظر گرفتن یک جمله از سری بود. شکل (۹) نشان می‌دهد افزایش تعداد جملات تأثیر چندانی در پاسخ نقطه میانی تیر ندارد. لذا یا یک جمله از حل، برای تعیین جابه‌جایی و همگرایی پاسخ کافی است.
$I (m^4)$	ممان اینرسی	
$K$	ضریب تصحیح برشی	
$l (m)$	طول تیر	
$M (N.m)$	ممان خمشی	
$P (N)$	نیروی محوری	
$q(x,t) (N/m)$	بار عرضی گسترده	
$V (N)$	نیروی برشی	
$W (m)$	خیز تیر	
$\eta_1 (Pa.s)$	ضریب استهلاک	
$\rho (Kg/m^3)$	دانسیته	
$\Phi$	چرخش مقطع	

### ۶- جمع بندی و نتیجه گیری

طبق نتایج حاصل شده، خیز به دست آمده از هر دو مدل کلونین و استاندارد و هر دو تئوری تیموشنکو و اوپلر-برنولی تقریباً یکسان است. بنابراین مدلسازی سازه با مدل کلونین بر اساس تئوری اوپلر-برنولی در محدوده پایین تا میانی استهلاک، مناسب‌تر است و نیازی به انجام محاسبات طولانی بر اساس تئوری تیموشنکو و مدل استاندارد نیست. البته تأثیر فرمول بندی بر اساس تئوری تیموشنکو بیشتر با تغییر ابعاد مقطع مشخص می‌شود که در اینجا بررسی نشده است.

### مراجع

- [1] Timoshenko S.P, Gere J.M, Theory of Elastic Stability, Mc Graw-Hill Company, 1985.
- [2] Mirsky I .,Hermann G., Axially Symmetric Motion of Thick Cylindrical Shells, *Journal of Applied Mechanics*, 1958, 25, pp. 99-152.
- [3] Baber T.T., Maddox R. A., Orozco C.E., A finite element model for harmonically excited viscoelastic sandwich beams, *Computers & Structures*, 66 (1), 1998, pp. 105-113.
- [4] Branca F., Guillermo J. , Nonlinear viscoelastic analysis of thin-walled beams in composite material, *Thin-Walled Structures* , 41, 2003, pp. 957-971 .
- [5] Ganesan N., Pradeep V., Buckling and vibration of sandwich beam with viscoelastic core under thermal environments, *Journal of Sound and Vibration*, 286 (4-5), 2005, pp. 1067-1074.
- [6] Kocatürk T., Şimşek M., Dynamic analysis of eccentrically prestressed viscoelastic Timoshenko beam under a moving harmonic load, *Computers & Structures*, 84(31-32) , 2006, pp. 2113-2127.

در مقادیر پایین استهلاک، رفتار تقریباً الاستیک است. در استهلاک‌های خیلی زیاد، با افزایش استهلاک خیز تغییر چندانی نمی‌کند ولی در محدوده میانی، تغییر استهلاک می‌تواند تأثیر جدی بر پاسخ داشته باشد. با توجه به شکل‌های (۵ و ۶) در این محدوده، تحلیل ماده با یک مدل الاستیک می‌تواند بیش از ۵۰٪ بر جابه‌جایی محاسبه شده تأثیر بگذارد. در استهلاک‌های خیلی زیاد اختلاف بین مدل‌های کلونین و استاندارد زیاد است. همچنین ظرفیت تحمل بار کماتش در یک تیر ویسکوالاستیک، ۵۰٪ بیش از تیر الاستیک (با مدول الاستیک  $E_1$  است. مدل ماکسول برای شبیه‌سازی رفتار سازه تحت بار محوری مناسب نیست و نمی‌تواند بار کماتش را پیش‌بینی کند.

### فهرست علائم

$A(m^2)$	سطح مقطع تیر
$E (Pa)$	مدول الاستیسیته
$E_1, E_2 (Pa)$	ضرایب مدول استاندارد و کلونین



- [7] Salehi M., Ansari F., Viscoelastic buckling of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams under time variant general loading condition, *Iranian Polymer Journal*, 15(3), 2006, pp.183-193.
- [8] Seong M., Yoon H., Vibration and dynamic buckling of shear beam-columns on elastic foundation under moving harmonic loads, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 2006, pp. 393-412.
- [9] Mahmoudi S.N, Khadem S., Kokabi M., Non-linear free vibrations of Kelvin-Voigt viscoelastic beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 2007, pp. 722-732.
- [10] Ganesan S.N., Sethuraman R., Buckling and free vibration analysis of magnetic constrained layer damping (MCLD) beam, *Finite Elements in Analysis and Design*, 45, 2009, pp. 156-162.
- [11] Kiani K., Nikkhoo A., Mehri B., Parametric analyses of multispan viscoelastic shear deformable beams under excitation of a moving mass, *Journal of Vibration and Acoustics*, 131, 2009, pp. 1-12.
- [12] Mofid M., Tehranchi A., Ostadhossein A., On the viscoelastic beam subjected to moving mass, *Advances in Engineering Software*, 41(2), 2010, pp. 240-247.
- [13] Arvin H., Sadighi M., Ohadi A.R., A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core, *Composite Structures*, 92(4), 2010, pp. 996-1008.
- [14] Hagadon P. , Dasgupa A. ,Vibration and Waves in Continuous Mechanical System, John Wiley Company, 2007.
- [15] Drozdov A., Viscoelastic Structures, Academic Press, 1998.

