

تأثیر حرارت بر کمانش پیچشی نانولوله کربنی دو جداره تحت بستر الاستیک، نوع پاسترناک

علی قربانپور آرانی^{۱*}، محمدشریف زارعی^۲، مهدی محمدی مهر^۳

* نویسنده مسئول: aghorban@kashanu.ac.ir

واژه‌های کلیدی

نانولوله کربنی دو جداره، کمانش حرارتی، مکانیک محیط‌های پیوسته غیرموضعی، محیط الاستیک، مدل پاسترناک.

چکیده

در این مقاله اثر حرارت روی کمانش پیچشی نانولوله کربنی دو جداره بر بستر الاستیک از نوع پاسترناک بررسی شده است. همچنین بر اساس مدل مکانیک پیوسته غیرموضعی، معادلات حاکم بر کمانش برای یک پوسته استوانه‌ای به دست آمده، سپس این معادلات به یک نانولوله دو جداره تعمیم داده شده‌اند. در این تحقیق علاوه بر حرارت و محیط الاستیک، اثر مقیاس کوچک طول و نیروهای واندروالسی نیز در نظر گرفته شده‌اند. همچنین برای شبیه‌سازی برهمکنش بین ماتریس پلیمری (محیط الاستیک) و جداره بیرونی نانولوله از مدل پاسترناک استفاده شده است. نتایج عددی این تحلیل نشان می‌دهند که بار بحرانی کمانش در موادهای میانی اتفاق می‌افتد. علاوه بر این کمانش برای مدل پاسترناک نسبت به مدل وینکلر دیرتر اتفاق می‌افتد. علاوه بر این نتایج مؤید آن است هنگامی که محیط الاستیک بسیار صلب است، بار کمانش برای هر دو مدل وینکلر و پاسترناک مستقل از مقدار این دو مدل است. همچنین مشاهده می‌شود که بار کمانش با افزایش تغییرات دمایی کاهش می‌یابد.

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان.

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان.

۳- استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان.

۱- مقدمه

نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۱ توسط آیجیما [۱] کشف شد، به دلیل خواص استثنایی این مواد مطالعه بر روی رفتارهای مکانیکی، شیمیایی و نیز الکتریکی آنها بسیار مورد توجه قرار گرفته و تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام شده است [۲-۴]. نانولوله‌های کربنی زمانی که تحت نیروی فشاری قرار می‌گیرند دچار خمش با زاویه‌های بزرگ، تابیدگی الاستیک و کماتش می‌شوند. اخیراً مطالعات زیادی درباره تغییر شکل‌های بزرگ نانولوله‌های کربنی تک‌جداره و چندجداره ناشی از کماتش، خمش و نیز پیچش انجام گرفته است [۵]. تحقیق درباره کماتش نانولوله کربنی تحت بارهای محوری و جانبی با استفاده از مدل مکانیک کلاسیک تاکنون بسیار انجام شده است [۶]. اما تعداد مقالات منتشر شده در زمینه کماتش پیچشی نانولوله‌های کربنی بسیار کمتر بوده و از طرفی در بیشتر تحقیقات گذشته مدل مکانیک کلاسیک پیوسته استفاده شده است. اما اخیراً مدل الاستیک غیرموضعی ارینگن [۷] به خاطر تطابق نتایج آن با داده‌های حاصل از مدل دینامیک مولکولی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مقیاس نانو، به دلیل کوچکی اندازه طول باند $C-C$ که مقداری برابر 0.142 نانومتر دارد، نیروهای بین اتمی اهمیت زیادی پیدا کرده که این موضوع در تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن مورد توجه قرار می‌گیرد.

امروزه نانو کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده توسط نانولوله‌های کربنی، به دلیل استحکام بالا و سبکی وزن آنها بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. بنابراین در تحلیل کماتش نانولوله‌های کربنی لازم است که اثر ماتریس پلیمری نیز در نظر گرفته شود. برای این منظور محققان برای تحلیل کماتش، اثر نیروی عمودی منتقل شده از نانولوله به محیط الاستیک را با مدل وینکلر شبیه‌سازی می‌کنند که به صورت مجموعه‌ای از فنرهای عمودی و غیر وابسته به هم مدل می‌شود. اما مدل وینکلر اثر نیروهای برشی منتقل شده را در نظر نمی‌گیرد. مدل دومی که تاکنون کمتر مورد استفاده قرار گرفته و هر دو نیروی‌های عمودی و برشی را در نظر می‌گیرد و از مدل قبلی نیز دقیق‌تر است، مدل پاسترناک [۸] است که در آن المان‌های محیط الاستیک به هم پیوسته شبیه‌سازی می‌شوند.

تغییر دما سبب افزایش یا کاهش طول باند $C-C$ شده و باعث ایجاد نیروهای محوری و محیطی در نانولوله کربنی می‌گردد که این عامل می‌تواند در ایجاد کماتش نانولوله کربنی مؤثر باشد، بنابراین تحلیل حرارتی نانولوله کربنی از اهمیت بسزایی برخوردار است. مورمو و پرادهان [۹] اثر حرارت بر پایداری نانولوله تک‌جداره را با استفاده از مدل تیر اوپلر-برنولی به دست آورده‌اند. آنها با به کارگیری مدل وینکلر و نیز تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن، کماتش نانولوله تک‌جداره را در دماهای بالا بررسی کرده‌اند. شنگجی و کایزین [۱۰] با استفاده از مدل پوسته استوانه‌ای و نیز با به کارگیری تئوری مکانیک پیوسته کماتش پیچشی یک نانولوله کربنی دو جداره را مورد بررسی قرار دادند آنها در تحلیلشان اثر محیط الاستیک را توسط مدل وینکلر شبیه‌سازی کردند و نشان دادند که با سخت تر شدن محیط الاستیک بار کماتش بحرانی نیز افزایش می‌یابد.

مطالعه رفتار کماتش نانولوله کربنی دو جداره در محیط الاستیک از نوع وینکلر توسط محققان زیادی انجام گرفته است، اما تحلیل کماتش پیچشی نانولوله کربنی دو جداره در محیط الاستیک از نوع پاسترناک تحت بارهای حرارتی و با استفاده از تئوری الاستیک غیر موضعی پوسته استوانه‌ای در میان مقالات منتشر شده به ندرت دیده می‌شود. تحلیل حاضر با مورد توجه قراردادن پارامترهای ذکر شده، کماتش پیچشی نانولوله دو جداره را برای تغییر دماهای بالا بر بستر الاستیک مورد بررسی قرار می‌دهد.

۲- مدل پوسته استوانه‌ای الاستیک غیرموضعی

معادلات ساختاری تنش غیر موضعی ارینگن در نقطه x به شکل زیر است [۱۱]:

$$\sigma_{ij} = \int_v \alpha(|x' - x|) H_{ij}(x') dv'(x') \quad (1)$$

$$H_{ij} = \beta_{ij} T + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

$$\alpha(|x|) = (\pi l^2 \tau^2)^{-1} k_o (|x|/l\tau), \quad \tau = e_o a / l_o \quad (3)$$

با استفاده از معادلات (۱) تا (۳)، روابط تنش - کرنش هوک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[1 - e_o^2 a^2 \nabla^2] \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} - \{\beta\} T \quad (4)$$

در این تحقیق تنها نیروهای پیچشی و حرارتی در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین با ترکیب معادله (۱۰) با رابطه (۱۲) و خطی سازی آن، رابطه زیر که بیان کننده کمانش نانولوله کربنی است؛ به دست می آید:

$$D \nabla^4 w_i + \frac{Eh}{R_i^2} w_{i,xxxx} - (1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) \nabla^4 \times \left[\frac{1}{R_i^2} N_{\theta \circ i}^T w_{i,\theta\theta} + N_{x \circ i}^T w_{i,xx} + \frac{\nu}{R_i} N_{x \theta \circ i}^M w_{ix\theta} \right] = (1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) \nabla^4 p_{\dot{n}_i} \quad (13)$$

نیروهای حرارتی در معادله (۱۳) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$N_x^T = -\frac{Eh\alpha_x T}{1-\nu}, \quad N_\theta^T = -\frac{Eh\alpha_\theta T}{1-\nu} \quad (14)$$

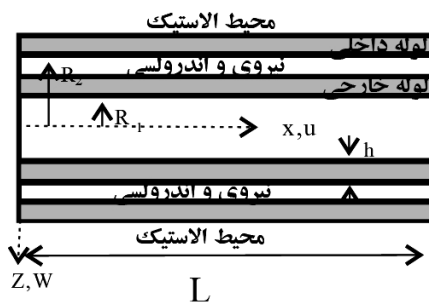
از طرفی مجموع گشتاور اعمالی به نانولوله دوجداره به صورت زیر می باشد:

$$M = M_1 + M_2 \quad (15)$$

علاوه بر این گشتاور اعمالی به شعاع داخلی و خارجی نیز بستگی دارند. بنابراین می توان نوشت:

$$N_{x\theta 1} = N_{x\theta 2} = N_{x\theta 0} = \frac{M_1}{2\pi R_1^2} = \frac{M_2}{2\pi R_2^2} \quad (16)$$

در حد فاصل بین دو نانولوله کربنی مجاور، نیروهای واندروالسی وجود دارند که تابعی از تغییر شکل فضای بین لایه‌ای هستند. این نیروها توسط مدل لنارد جونز توصیف می شوند. از آنجا که فضای تعادلی بین لایه‌ای حدود ۰/۳۴ نانومتر می باشد، بنابراین اگر نیروی خارجی به نانولوله اعمال شود این فضای تعادلی تغییر کرده و باعث ایجاد نیروی واندروالسی می شود. همچنین نیروی واندروالسی بین دو لایه مجاور خطی و مخالف همدیگر هستند [۱۳]. شکل (۱) یک نانولوله دوجداره را نشان می دهد که در محیط الاستیک قرار دارد.



شکل (۱) نانولوله کربنی دو جداره بر بستر الاستیک.

روابط کرنش - تغییر مکان در یک پوسته استوانه‌ای جدار نازک به شعاع R و ضخامت h را می توان به صورت زیر نوشت [۱۲]:

$$\epsilon_x = u_{,x} - w_{,xx}z \quad (5)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{R}(v_{,\theta} - w - \frac{1}{R}w_{,\theta\theta}z) \quad (6)$$

$$\gamma_{x\theta} = v_{,\theta} + \frac{1}{R}u_{,\theta} - \frac{1}{R}w_{,x\theta}z \quad (7)$$

نیروهای غشایی و ممان ها در صفحه میانی به شکل زیر نوشته می شود:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz \quad (8)$$

معادلات تعادل به شکل زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R}M_{\theta,\theta} + M_{\theta x,x} - Q_\theta &= 0 \\ M_{x,x\theta} + \frac{1}{R}M_{x\theta,\theta} - Q_x &= 0 \\ N_{x,x} + \frac{1}{R}N_{x,\theta} &= 0 \\ \frac{1}{R}N_{\theta,\theta} + N_{\theta x,x} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R}Q_{\theta,\theta} + Q_{x,\theta} - \frac{1}{R}N_\theta + N_x w_{,xx} \\ + \frac{1}{R}N_\theta w_{,\theta\theta} - \frac{\nu}{R}N_x \theta w_{,x\theta} + p_r(x,\theta) &= 0 \end{aligned}$$

با نوشتن معادلات تعادل و ترکیب آنها برای پوسته استوانه‌ای، رابطه زیر به دست می آید [۱۲]:

$$D \nabla^4 w_i - \frac{(1 - e_0^2 a^2 \nabla^2)}{R_i} N_{\theta i} - (1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) \left(\frac{1}{R_i} N_{\theta i} w_{i,\theta\theta} + N_{xi} w_{i,xx} + \frac{\nu}{R_i} N_{x\theta i} w_{i,x\theta} \right) = (1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) p_{r \circ} \quad (10)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11)$$

با استفاده از تئوری پوسته، تابع تنش برای نیروهای غشایی غیر موضعی به صورت زیر تعریف می شود [۱۰]:

$$\begin{aligned} (1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) N_{xi} &= \frac{1}{R_i} F_{i,\theta\theta} \\ (1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) [N_{x\theta i} - N_{x\theta \circ i}] &= -\frac{1}{R_i} F_{i,x\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

$$(1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) N_{\theta i} = F_{i,xx}$$

$$\nabla^4 F_i = -\frac{Eh}{R_i} w_{i,xx}$$

$$\alpha_1 = \lambda_m^\gamma + \beta_1^\gamma, \quad \alpha_2 = \lambda_m^\gamma + \beta_2^\gamma \quad (26)$$

$$\beta_1 = \frac{n}{R_1}, \quad \beta_2 = \frac{n}{R_2}$$

برای به دست آوردن حل غیر صفر رابطه (۲۲) لازم است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر شود. در نتیجه مقادیر نیروهای پیچشی بحرانی به دست می آیند.

۳- نتیجه گیری

مشخصات هندسی، مکانیکی و حرارتی نانولوله کربنی دوجداره به صورت زیر تعریف می شوند [۱۲] و [۱۳]:

$$D = 0.785ev, \quad c = 9.918667 \times 10^{19} \text{ N/m}^3$$

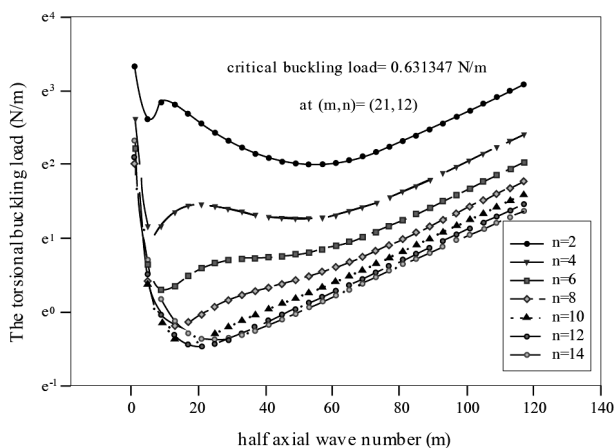
$$v = 0.3, \quad e_o a = 0.5538, \quad R_1 = 0.68 \text{ nm} \quad (26)$$

$$R_2 = 1.02 \text{ nm}, \quad L = 1.0 R_2, \quad Eh = 36.0 \text{ J/m}^2$$

$$\alpha_x = 1/1 \times 10^{-6}, \quad \alpha_\theta = 0.78 \times 10^{-6}$$

نتایج حاصل از این تحلیل نشان می دهد که بار کمانش بحرانی برشی در مدهای $(m, n) = (21, 12)$ اتفاق افتاده که مقدار آن برابر 0.631347 N/m می باشد. بار کمانش در مدهای طولی پایین به مراتب بیشتر از بار کمانش در مدهای بالاتر است شکل (۲).

شکل (۳) نشان می دهد که بار کمانش با افزایش G ، ابتدا با شیب تند زیاد شده، اما به تدریج این شیب کاهش می یابد. به طوری که با افزایش m ، شیب تقریباً صفر می شود.



شکل (۲) بار کمانش پیچشی بر حسب مدهای کمانش طولی و محیطی.

فشار واندروالسی برای دو لایه مجاور به صورت زیر نوشته می شود:

$$P_{r(i)i+1}^V R_i = -P_{r(i+1)i}^V R_{i+1}, \quad i=1 \quad (17)$$

$$P_{r(i)i+1}^V = c(w_{i+1} - w_i), \quad i=1 \quad (18)$$

از طرفی عبارت فشار حاصل از محیط الاستیک به شکل زیر است:

$$P^{em} = K_w w_i - G \nabla^2 w_i, \quad i=2 \quad (19)$$

به طور کلی فشار ناشی از نیروی واندروالسی و محیط الاستیک را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P_{ri} = m_o c (w_{i+1} - w_i) + m_1 \left[-c \frac{R_i - 1}{R_i} (w_i - w_{i-1}) - K_w w_i + G \nabla^2 w_i \right] \quad (20)$$

با توجه به شرایط مرزی تکیه گاه ساده، جابجایی در راستای شعاعی به صورت زیر بیان می شود:

$$w_i = A_i \sin(\lambda_m x - n\theta), \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{L}, \quad i=1,2 \quad (21)$$

که m و n به ترتیب تعداد نیم موج سینوسی طولی و تعداد کامل موج محیطی می باشند.

با قراردادن رابطه (۲۱) در معادله (۱۳) برای نانولوله کربنی دوجداره رابطه ای به شکل زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (22)$$

که

$$M_{11} = D \alpha_1^f + \frac{Eh}{R_1^\gamma} \lambda_m^f \quad (23)$$

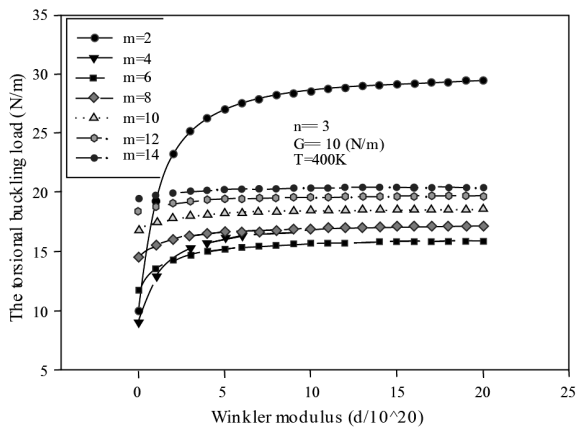
$$- (1 + e_o^\gamma a^\gamma \alpha_1) \alpha_1^\gamma \left[\lambda_m \beta_1 N_x \theta_o + \frac{EhT}{1-v} (\alpha_\theta \beta_1^\gamma + \alpha_x \lambda_m^\gamma) - c \right]$$

$$M_{12} = -c (1 + e_o^\gamma a^\gamma \alpha_2) \alpha_2^\gamma \quad (24)$$

$$M_{21} = -c \frac{R_1}{R_2} (1 + e_o^\gamma a^\gamma \alpha_1) \alpha_1^\gamma$$

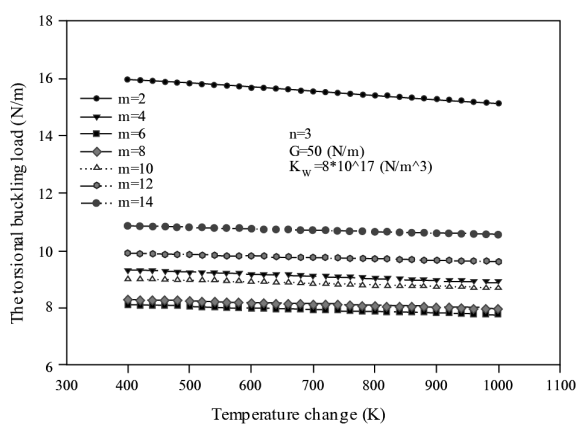
$$M_{22} = D \alpha_2^f \lambda_m^f \frac{Eh}{R_2^\gamma} \quad (25)$$

$$- (1 + e_o^\gamma a^\gamma \alpha_2) \alpha_2^\gamma \left[\lambda_m \beta_2 N_x \theta_o + \frac{EhT}{1-v} (\alpha_\theta \beta_2^\gamma + \alpha_x \lambda_m^\gamma) - c \frac{R_1}{R_2} + K_w + G \alpha_2 \right]$$



شکل (۵) بار کمانش پیچشی بر حسب مدول وینکلر در دمای بالا.

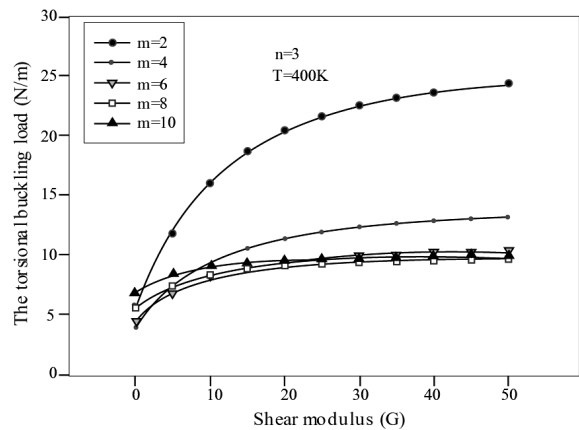
تحلیل کمانش حرارتی نانولوله کربنی دو جداره بر بستر الاستیک از نوع پاسترناک در شکل (۶) نشان داده شده است. مطابق آن با افزایش T بار کمانش کاسته شده، به طوری که بار کمانش برای $m=2$ از $T=400K$ تا $T=1000K$ ، $5/2\%$ کاهش می یابد. همچنین می توان مشاهده نمود که وابستگی بار کمانش به T ، با افزایش m کم می شود.



شکل (۶) بار کمانش پیچشی بر حسب تغییرات دما.

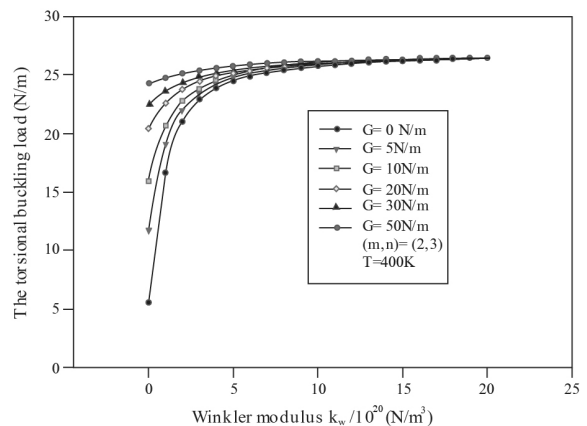
فهرست علائم

A_i	ثابت حقیقی
a	طول باند کربن - کربن (m)
c	ضریب برهمکنش لایه ای (N/m^3)
C_{ij}	تانسور مدول الاستیک
D	سختی خمشی پوسته J
E	مدول یانگ
e_o	ثابت ماده



شکل (۳) بار کمانش پیچشی بر حسب ثابت برشی نوع پاسترناک (G) در دماهای بالا.

شکل (۴) بار کمانش پیچشی بر حسب K_W در دمای $T=400K$ را برای مقادیر مختلف G نمایش می دهد. نتایج به دست آمده نشان می دهد که بار کمانش پیچشی فونداسیون پاسترناک بیشتر از فونداسیون وینکلر بوده و با افزایش G برای $K_W < 5 N/m^3$ ، بار کمانش افزایش می یابد. اما با افزایش K_W تاثیر ثابت برشی نوع پاسترناک (G) روی بار کمانش پیچشی ناچیز گردیده و در G های بالا مقدار بار کمانش به مقدار ثابت $26/5 (N/m)$ منتهی می شود.



شکل (۴) بار کمانش پیچشی نسبت به مدول برشی G در دمای بالا.

در شکل (۵) بار کمانش برای مدهای مختلف m بر حسب ثابت فتری نوع وینکلر (K_W) ترسیم شده است. نتایج نشان می دهد که کمترین بار کمانش در $m=4$ و $K_W=0$ اتفاق می افتد و مقدار آن برابر $9/09 N/m$ می باشد. همچنین پیداست که برای $K_W > 5 N/m^3$ مقادیر بار کمانش برای $m=2$ بیشترین، برای $m=6$ کمترین و سپس با افزایش m مقدار بار کمانش زیاد می شود.

- [4] Ru CQ., Elastic buckling of single-walled carbon nanotube ropes under high pressure, *Physics Review B*, 62, 2000, pp. 10405–10408.
- [5] M.J. Hao, X.M. Guo, Q. Wang., Small-scale effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29, 2010, pp. 49-55.
- [6] Y.C. Zhang, X. Chen, X. Wang., Effects of temperature on mechanical properties of multi-walled, *Composites Science and Technology*, 68, 2008, pp. 572-581.
- [7] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, 54, 1983, pp. 4703-4710.
- [8] S. Kitipornchai, X. Q. He, and K. M., Buckling analysis of triple-walled carbon nanotubes embedded in an elastic matrix, *Journal of Applied Physics*, 97, 2005, pp.114318-114325.
- [9] T. Murmu, S.C. Pradhan., *Thermal effects on the stability of embedded carbon nanotubes*, Computational Materials Science, 47, 2010, pp. 721-726.
- [10] S. Chengqi, L. Kaixin, Dynamic torsional buckling of a double-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27, 2008, pp. 40–49.
- [11] A.C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, Springer-Verlag, New York, 2002
- [12] Mohammadimehr M., Saidi A.R., Ghorbanpour Arani A., Arefmanesh A. , Torsional buckling of a DWCNT embedded on winkler and pasternak foundations using nonlocal theory, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24(6), 2010, pp.1289-1299
- [13] Y. Xiaohu, H. Qiang, The thermal effect on axially compressed buckling of a double-walled carbon nanotube, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26, 2007, pp. 298–312.
- F تابع تنش
- G مدول برشی (N/m)
- H_{ij} تانسور تنش موضعی
- k_o تابع بسل
- K_w مدول وینکлер (N/m^3)
- L طول نانولوله (m)
- m, n مود کمانش محیطی و طولی
- $N_{x^o}^T, N_{\theta^o}^T$ نیروی حرارتی محیطی و طولی
- $N_{x\theta^o i}$ نیروی برشی
- p^{em} فشار محیط الاستیک
- P_{ri}^V فشار واندروالسی
- $Q_{\theta, x, \theta x}$ نیروهای برشی
- R_i شعاع نانولوله‌ها
- T تغییرات دما
- u, v, w جابجایی در جهات سه گانه
- $\alpha(|x' - x|)$ تابع کرنل
- α_x, α_θ ضرایب انبساط محیطی و طولی
- β_{ij} تانسور تنش حرارتی
- ε_{ij} تانسور کرنش
- σ_{ij} تانسور تنش غیر موضعی
- v ضریب پواسان

مراجع

- [1] S. Iijima, Helical Micro Tubes of Graphitic Carbon, *Nature*, 354, 1991, pp. 56-58.
- [2] S. Rodney Ruoff, Q. Dong, L. Wing Kam, Mechanical properties of carbon nanotubes: theoretical predictions and experimental measurements, *C. R. Physique*, 4, 2003, pp. 993-1008
- [3] A. Ghorbanpour Arani, R. Rahmani, A. Arefmanesh, S. Golabi, Buckling Analysis of Multi-Walled Carbon Nanotubes under Combined Loading Considering the Effect of Small Length Scale, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22, 2008, pp. 429-439.