

## بررسی ارتعاش تیر ضخیم تابعی مدرج تحت نیروی محوری براساس تئوری دو بعدی الاستیسیته و روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته

حسین فراهانی<sup>۱</sup>، فرزانه براتی<sup>۲\*</sup>، محمد نجاتی<sup>۳</sup>، حمید باتمانی<sup>۴</sup>

\* نویسنده مسئول: F.Barati@iauh.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

تیر تابعی مدرج، تئوری دو بعدی الاستیسیته، روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، بسامد طبیعی.

### چکیده

در این مقاله ارتعاش تیر یکسره گیردار از جنس تابعی مدرج، تحت تاثیر بار محوری ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. تیر دارای سطح مقطع یکنواخت است و خواص تیر در راستای ضخامت تیر به صورت تابعی و پیوسته تغییر می‌کند. معادلات پایداری و معادلات حرکت از اصل همپتون و بر اساس تئوری دو بعدی الاستیسیته، بر حسب مولفه‌های جابجایی به دست آمده اند. حل معادلات دیفرانسیل کوپل پایداری و حرکت با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته صورت گرفته است. در این مقاله تاثیر پارامترهای مختلف مانند نسبت ضخامت به طول، بار محوری اعمال شده و همچنین توان کسر حجمی مختلف، بر روی بسامدهای طبیعی تیر مورد بررسی قرار گرفت. همچنین برای بررسی همخوانی معادلات و همچنین روش حل به کار گرفته شده، مقایسه‌ای بین کار حاضر با مقالات معتبر و همچنین نرم افزار تحلیلی ABAQUS انجام شد. نتایج نشان می‌دهد روش عددی مربعات تفاضلی تعمیم یافته به کار گرفته شده در این مقاله دارای دقت خوبی می‌باشد. براساس نتایج، با افزایش توان کسر حجمی الیاف در تیر تابعی مدرج تحت بار محوری بسامد طبیعی تیر افزایش پیدا کرده و به ازای توان کسر حجمی بالا تغییرات زیادی در بسامد طبیعی مشاهده نمی‌شود. همچنین با افزایش نسبت ضخامت به طول در محدوده بررسی شده تیر هدفمند، بسامد طبیعی بی بعد تیر بدون بار بحرانی، کاهش پیدا می‌کند. اعمال بار محوری تا محدوده ی بار بحرانی، بسامد های طبیعی تیر تابعی مدرج را تحت تاثیر قرار داده و باعث کاهش آن می‌گردد.

- ۱- کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، پردیس تحصیلات تکمیلی علوم و تحقیقات، همدان، ایران
- ۲- استادیار، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران
- ۳- کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، اراک، ایران
- ۳- کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، پردیس تحصیلات تکمیلی علوم و تحقیقات، همدان، ایران

## ۱- مقدمه

مواد تابعی مدرج<sup>۱</sup> برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن ساخته شد [۱] و در ابتدا به عنوان مواد مقاوم بر حرارت برای پوشش شاتل های فضایی و راکتورهای هسته ای که در معرض درجه حرارت بالا هستند، مورد استفاده قرار گرفتند و تحلیل های ترموالاستیک آن ها بطور گسترده ای انجام شده است [۲]. در دهه اخیر با افزایش چشمگیر تقاضا برای سازه های با مقاومت بالا در برابر حرارت، جذب انرژی و وزن سبک، مطالعات زیادی روی رفتار تیرهای تابعی مدرج صورت گرفته است.

شاووزی پور و هاشمی به بررسی ارتعاش تیر غیر یکنواخت به روش المان محدود پرداختند و ازالگوریتم ویلیامز برای به دست آوردن بسامدهای تیر استفاده نمودند [۳].

لی و همکاران ارتعاش تیرهای کامپوزیت محوری را بر اساس تئوری برشی هذلولی بررسی نمودند و نشان دادند که روابطشان با نتایج دیگر همخوانی خوبی دارد [۴].

لیانگ [۵] به بررسی ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره پرداخت. او از تئوری ون کارمن استفاده نمود و از روش ریتز برای بدست آوردن معادلات استفاده کرد و اثر کسر حجمی های مختلف روی بسامد طبیعی را بررسی نمود.

سوژانگ [۶] از روش تبدیل دیفرانسیل<sup>۲</sup> برای بررسی پاسخ ارتعاش آزاد تیرهای تابعی مدرج استفاده نمود. مدل سازی ارتعاش آزاد تیر تابعی مدرج دوبعدی با تغییرات پیوسته خواص تیر و تحت اثر نیروی محوری بزرگ توسط امین بقایی و همکاران [۷] انجام شد. آن ها با استفاده از دیفرانسیل مرتبه چهارم به تحلیل ارتعاش تیر دوبعدی پرداختند.

پرادهام و مورنو [۸] ارتعاش حرارتی تیر تابعی مدرج را مورد مطالعه قرار دادند. آن ها از تئوری مربعات تفاضلی تعمیم یافته اصلاح شده<sup>۳</sup> برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل جهت تحلیل ارتعاش تیر استفاده نمودند. سوهانی و ایپکچی [۹] معادلات حاکم بر ارتعاش تیر با خیز نسبتاً زیاد را به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج نمودند. آن ها پس از بی بعد سازی معادلات، از تئوری اغتشاشات برای تعیین بسامدهای طبیعی تیر و بار کمانش استفاده کردند.

آزادی و همکاران [۱۰] ارتعاشات آزاد عرضی تیرهای ساخته شده از مواد تابعی مدرج، با استفاده از روش اجزاء محدود را بررسی نموده اند. آن ها تیر تابعی مدرج را بصورت ایزوتروپیک فرض کرده و نتایج حاصل از کد نوشته شده را با نتایج تحلیلی و نرم افزاری در شرایط مرزی متفاوت مقایسه نمودند.

ارتعاشات خطی یک تیر تیموشنکو از جنس مواد مدرج تابعی بر روی یک بستر الاستیک وینکلر و یک بار متحرک نوسانی با سرعت ثابت بر روی آن توسط رجبی و همکاران [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفت. آن ها معادلات حرکت بر مساله را توسط روش انرژی و با استفاده از اصل هامیلتون استخراج نموده و اثرات پارامترهای مختلف مانند سرعت بار نوسانی، پروفیل تغییرات خواص ماده تیر و سختی بستر بر روی پاسخ ارتعاشی تیر مورد بحث و نتیجه گیری قرار دادند.

رحیمی و همکاران [۱۲] با روش های مربعات تفاضلی تعمیم یافته و روش فضا حالت یک حل الاستیسیته را برای بررسی ارتعاشات آزاد و تاثیر بستر الاستیک در یک تیر تابعی مدرج دوجهته مقید در لایه های پیزوالکتریک، ارائه نمودند. به این صورت که در راستای طولی تیر از روش مربعات

1- Functional graded materials (FGM)

2- Differential transformation method

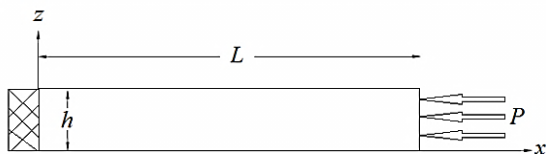
3- Modified differential quadrature method (MDQM)

بر اساس مطالعه نویسندگان ارتعاش تیر یکسر گیردار از جنس مواد تابعی مدرج، تحت تاثیر بار محوری به کمک تئوری دوبعدی الاستیسته و روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته مورد بررسی قرار نگرفته است. در پژوهش حاضر معادلات حرکت مربوط به تحلیل ارتعاشی با استفاده از اصل همپلتون و بر اساس تئوری دو بعدی الاستیسته بر حسب مولفه‌های جابجایی بدست آمده است. برای حل معادلات دیفرانسیلی از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته<sup>۱</sup> بهره گرفته شده است. همچنین تاثیر نسبت ضخامت به طول، بار محوری اعمال شده و همچنین توان کسر حجمی مختلف، بر روی بسامد-های طبیعی تیر و بررسی نرخ همگرایی بررسی شده است. تفاوت این کار با کارهای قبلی استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در حل مسئله ارتعاش اجباری و مقایسه نتایج حاصل با نرم افزار ABAQUS می باشد.

## ۲- استخراج معادلات

### ۲-۱- خصوصیات تیر تابعی مدرج

در شکل (۱) شماتیکی از تیر یکسر گیردار مورد بررسی تحت بار محوری نشان داده شده است.



شکل (۱) شماتیک تیر یکسر گیردار تحت بار محوری

فرمول‌بندی در نظر گرفته شده در این تحقیق بر اساس تئوری دو بعدی الاستیسته می باشد.

برای ماده‌ی تابعی مدرج که تقویت شده با الیاف می‌باشد، ماده به صورت اورتوتروپیک<sup>۲</sup> در نظر گرفته شده است و خواص مکانیکی ماده‌ی تابعی مدرج شامل مدول یانگ، ضریب پواسون، مدول برشی و دانسیته، از ترکیب دو جزء

تفاضلی تعمیم یافته و در راستای ضخامت تیر از تکنیک فضاحالت را در نظر گرفتند.

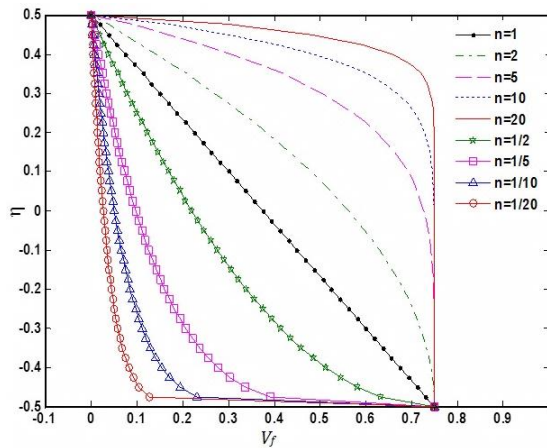
ستوده و همکارانش [۱۳] به بررسی ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی هدفمند بر اساس تئوری دو بعدی الاستیسته پرداخته و یک کد عددی با کوپل تئوری لایه‌ای و روش عددی دیفرانسیل مربعات تفاضلی تعمیم یافته ارائه نمودند. در این پژوهش مولفه‌های جابجایی بر اساس تئوری لایه‌ای در نظر گرفته شده اند و معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوطه به کمک اصل همپلتون بدست آمده است. در نهایت از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته به عنوان یک روش کارآمد برای حل عددی معادلات حاکمه استفاده شده است.

شیمشک و همکاران [۱۴] برای اولین بار مساله ارتعاشات یک تیر ایلر- برنولی اجنس مواد تابعی مدرج دوسر ساده را تحت تاثیر حرکت یک بار نوسانی با دامنه متحرک و دارای سرعت ثابت مورد بررسی قرار دادند. خواص ماده تابعی به صورت توانی در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل همپلتون استخراج گردیده و اثرات تکیه گاه ها به صورت ضرایب نامعین لاگرانژ در معادلات وارد شده اند.

روش تحلیلی هموتویی برای آنالیز ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای ساخته شده از مواد تابعی مدرج بر روی بستر الاستیک غیرخطی، تحت بارهای مکانیکی و حرارتی توسط رفیعی پور و همکاران [۱۵] انجام شده است. آن‌ها ابتدا با فرض تئوری اویلر- برنولی و با استفاده از رابطه کرنش - جابجایی ون کارمن، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت غیرخطی استخراج نموده و سپس با به کار بردن روش تجزیه گالرکین، معادله حاکمه غیرخطی به یک معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی کاهش داده اند.

1- Generalized differential quadrature (GDQ)

2- Orthotropic



شکل (۲) تغییر کسر حجمی الیاف در راستای ضخامت به ازای پارامتر بی بعد  $\eta$  برای تیر از جنس تابعی مدرج تقویت شده با الیاف

که پارامتر بی بعد  $\eta$  به صورت  $\eta = \frac{z-h/2}{h}$  تعریف می گردد.

### ۲-۲- روابط تنش و کرنش

روابط تنش بر حسب کرنش برای فرمول بندی دو بعدی از یک جسم الاستیک به طوری که محور افقی جابجایی در راستای محور  $x$  و محور قائم جابجایی در راستای محور  $z$  نسبت به صفحه میانی باشد به صورت زیر بیان می شود [۱۷]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (۸-۲)$$

که  $C_{ij}$  بیانگر ماتریس سختی است که به صورت روابط (۹-۲) و (۹-۳) برای یک ماده ی اورتوتروپیک به دست می آید [۱۷]:

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (۹-۲)$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{55} = G_{13}$$

رابطه (۱۰-۲) کرنش ها بر حسب جابجایی را نشان می دهد.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (۱۰-۲)$$

در رابطه (۷)  $u$  و  $w$  به ترتیب جابجایی های مجهول در راستای محور  $x$  و  $z$  می باشند. با قرار دادن روابط (۷) در

الیاف و ماتریس به صورت روابط (۱-۲) تا (۵-۲) تعریف شده است که جهات  $k$  و  $i$  جهات اصلی به ترتیب در راستای محور  $x$  و محور  $z$  می باشند [۱۶]:

$$E_i = V_f E_i^f + V_m E_i^m \quad (۱-۲)$$

$$\frac{1}{E_i} = \frac{V_f}{E_i^f} + \frac{V_m}{E_i^m} -$$

$$V_f V_m \frac{\nu_f^2 E_i^m / E_i^f + \nu_m^2 E_i^f / E_i^m - 2\nu_f \nu_m}{V_f E_i^f + V_m E_i^m} \quad (i = 2, 3) \quad (۲-۲)$$

$$\frac{1}{G_{ik}} = \frac{V_f}{G_{ik}^f} + \frac{V_m}{G_{ik}^m} \quad (ik = 12, 13, 23) \quad (۳-۲)$$

$$\nu_{ik} = V_f \nu^f + V_m \nu^m \quad (ik = 12, 13, 23) \quad (۴-۲)$$

$$\rho = V_f \rho^f + V_m \rho^m \quad (۵-۲)$$

که در معادله (۱-۲)،  $\rho^f, G^f, \nu^f, E^f$  به ترتیب مدول یانگ، ضریب پواسون، مدول برشی و دانسیته مربوط به جزء الیاف و  $\rho^m, G^m, \nu^m, E^m$  به ترتیب مدول یانگ، ضریب پواسون، مدول برشی و دانسیته مربوط به جزء ماتریس (رزین) می باشد.

$V_f$  و  $V_m$  به ترتیب کسر حجمی ماتریس و الیاف در ماده ی تابعی مدرج می باشد که طبق معادله (۶-۲) به صورت تابعی از ضخامت تیر بیان می گردد [۱۶].

$$V = V_i + (V_o - V_i) \left( \frac{z}{h} \right)^n \quad (۶-۲)$$

در رابطه (۶-۱)  $n$  توان کسر حجمی الیاف،  $V$  کسر حجمی الیاف یا ماتریس،  $V_i$  کسر حجمی در سطح بالا و  $V_o$  کسر حجمی در سطح پایین تیر می باشد که با محاسبه  $V$  برای الیاف می توان مقدار کسر حجمی برای ماتریس و بالعکس را از رابطه (۷-۲) به دست آورد.

$$V_m + V_f = 1 \quad (۷-۲)$$

مقدار کسر حجمی الیاف یا ماتریس در سطح بالایی و پایینی در تیر مورد مطالعه می تواند بین ۰ تا ۰/۷۵ باشد.

مطابق شکل (۲) تغییرات کسر حجمی الیاف در راستای پارامتر بی بعد  $\eta$  به ازای توان کسر حجمی مختلف از مدل

کلاسیک مشاهده می شود.

## ۴-۲- معادلات حرکت و شرایط مرزی

از رابطه‌ی (۱۶-۲)، معادلات حاکم بر تیر طبق تئوری الاستیسیته دو بعدی تحت بار محوری کششی  $P$ ، با وریشال گیری و صفر قرار دادن ضرایب وریشال مولفه های جابجایی روابط (۱۷-۲) را به دست می‌دهد:

$$1. Destabilizing \quad \delta u = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (17-2)$$

$$\delta w = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (18-2)$$

برای تیر تحت بار محوری فشاری  $P = -P$  می‌باشد.

با قرار دادن روابط تنش بر حسب جابجایی، رابطه (۱۱-۲) در رابطه (۱۷-۲) و (۱۸-۲)، معادلات حرکت بر حسب مولفه های جابجایی و جملات کمانش به صورت زیر، برای تیر بدست می‌آید:

$$\delta u = 0 \Rightarrow C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \quad (19-2)$$

$$C_{55} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\delta w = 0 \Rightarrow \frac{\partial C_{12}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial C_{22}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \quad (20-2)$$

$$C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{55} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

معادلات پایداری از وریشال ۲ هامیلتونین به دست می‌آیند. برای تعیین بار کمانش فرض می‌شود فرکانس صفر است، همچنین با برقرار بودن جمله‌های اینرسی و قرار دادن حل پریودیک، یعنی معادله‌های (۲۱-۲) و (۲۲-۲) معادلات (۲۳-۲) و (۲۴-۲) حاصل می‌شود که با حل آن‌ها می‌توان

بسامدهای طبیعی تیر را بدست آورد.

$$u(x, z, t) = U(x, z) e^{i\omega t} \quad (21-2)$$

$$w(x, z, t) = W(x, z) e^{i\omega t} \quad (22-2)$$

$$C_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} + \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \quad (23-2)$$

$$+ C_{55} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) - P \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\rho \omega^2 U$$

$$\frac{\partial C_{12}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{\partial C_{22}}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \quad (24-2)$$

$$+ C_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + C_{55} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\rho \omega^2 W$$

روابط (۵)، مولفه‌های تنش بر حسب جابجایی‌های مجهول

$u, w$  به صورت روابط (۱۱-۲) بدست می‌آید.

$$\sigma_x = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_z = C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (11-2)$$

$$\sigma_{xz} = C_{55} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

## ۳-۲- پیاده سازی اصل همیلتون

طبق رابطه همیلتون داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta PE + \delta PG - \delta KE) dt = 0 \quad (12-2)$$

در رابطه‌ی (۹) انرژی کرنشی،  $PG$  انرژی پتانسیل از تنش‌های داخل صفحه‌ای و  $KE$  انرژی جنبشی از سیستم و  $\delta$  بیانگر وریشال گیری می‌باشند که به ترتیب به صورت روابط (۱۳-۲)، (۱۴-۲) و (۱۵-۲) تعریف می‌گردند:

$$PE = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^h (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) b dz dx \quad (13-2)$$

$$KE = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^h \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] b dz dx \quad (14-2)$$

در رابطه (۱۴-۲) جملات اول و دوم داخل پرانتز نشان‌دهنده تاثیر بی‌ثباتی<sup>۱</sup> در داخل صفحه و خارج از صفحه به ازای بارهای به کار گرفته شده است [۱۷].

$$PG = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^h P \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] b dz dx \quad (15-2)$$

با جایگذاری روابط (۱۳-۲) تا (۱۵-۲) در رابطه‌ی (۱۲-۲) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^h \left\{ \left[ \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_z \frac{\partial \delta w}{\partial z} + \sigma_{xz} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right] + P \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] - \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right] \right\} b dz dx dt = 0 \quad (16-2)$$

در معادله‌ی بالا  $b$  بیانگر پهنای تیر و  $\delta$  نشان دهنده وریشال گیری،  $P$  بار محوری و  $\rho$  دانسیته می‌باشد. لازم به ذکر است که وریشال روی جملات کرنش اثر می‌کند [۱۸].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_{12}}{\partial z} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} u_{kj} + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} w_{kj} + \frac{\partial C_{22}}{\partial z} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} w_{il} \\ & + C_{22} \sum_{l=1}^{N_z} B_{jl}^{(z)} w_{il} + C_{12} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} u_{kl} \quad (۴-۳) \\ & + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} u_{kl} - P \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} w_{kj} = -\rho \omega^2 w_{ij} \end{aligned}$$

۲-۳- اعمال روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته بر

شرایط مرزی تیر تحت بار محوری :

در سطح بالا و پایین تیر  $z=0, h$  :

$$C_{55} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} u_{il} + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} w_{kj} = 0 \quad (۵-۳)$$

$$C_{12} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} u_{kj} + C_{22} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} w_{il} = 0 \quad (۶-۳)$$

اعمال روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته بر شرایط مرزی مختلف روابط زیر را به دست می دهد:

$$\text{Sympley - Supported} \begin{cases} w_{ij} = 0 \\ C_{11} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} u_{kj} + C_{12} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} w_{il} = 0 \end{cases} \quad (۷-۳)$$

$$\text{Free} \begin{cases} C_{11} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} u_{kj} + C_{12} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} w_{il} = 0 \\ C_{55} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} u_{il} + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} w_{kj} = 0 \end{cases} \quad (۸-۳)$$

$$\text{Clamped} \begin{cases} u_{ij} = 0 \\ w_{ij} = 0 \end{cases} \quad (۹-۳)$$

که  $A_{ik}^{(x)}$ ,  $A_{jl}^{(z)}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مرتبه اول در راستای  $x$  و  $z$  و  $B_{ik}^{(x)}$ ,  $B_{jl}^{(z)}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مرتبه دوم در راستای  $x$  و  $z$  می باشند و به صورت روابط (۱۰-۳) و (۱۱-۳) تعریف می شوند [۱۹]:

$$A_{jl}^{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{L_x (\xi_j - \xi_l)} M(\xi_l) & \text{for } j \neq l \\ -\sum_{l=1, l \neq j}^{N_x} A_{jl}^{(x)} & \\ \text{for } j = l; j, l = 1, 2, \dots, N_x \end{cases} \quad (۱۰-۳)$$

شرایط مرزی حاکم برای تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف به صورت زیر بیان می گردد:

در سطح بالا  $z=h$  و سطح پایینی  $z=0$  تیر:

$$\delta U = 0 \Rightarrow C_{55} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \quad (۲۵-۲)$$

$$\delta W = 0 \Rightarrow C_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (۲۶-۲)$$

در  $x=0$  شرط مرزی گیردار:

$$U = 0 \quad (۲۷-۲)$$

$$W = 0 \quad (۲۸-۲)$$

در  $x=L$  شرط مرزی آزاد:

$$\delta U = 0 \Rightarrow C_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (۳۱-۲)$$

$$\delta W = 0 \Rightarrow C_{55} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0 \quad (۳۰-۲)$$

۳- حل معادلات

۳-۱- اعمال روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته:

با پیاده سازی روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته بر رابطه (۱۵) که معادلات تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف در راستای ضخامت تحت بار محوری است و صفر قرار دادن طرف دوم روابط (برای رسیدن به معادلات پایداری) معادلات زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & C_{11} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} u_{kj} + \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} w_{kj} + \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} u_{il} \\ & + C_{55} \sum_{l=1}^{N_z} B_{jl}^{(z)} u_{il} + C_{12} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} w_{kl} \quad (۱-۳) \\ & + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} w_{kl} - P \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} u_{kj} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_{12}}{\partial z} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} u_{kj} + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} w_{kj} + \frac{\partial C_{22}}{\partial z} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} w_{il} \\ & + C_{22} \sum_{l=1}^{N_z} B_{jl}^{(z)} w_{il} + C_{12} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} u_{kl} \quad (۲-۳) \\ & + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} u_{kl} - P \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} w_{kj} = 0 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن نرم اینرسی:

$$\begin{aligned} & C_{11} \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} u_{kj} + \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(x)} w_{kj} + \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \sum_{l=1}^{N_z} A_{jl}^{(z)} u_{il} \\ & + C_{55} \sum_{l=1}^{N_z} B_{jl}^{(z)} u_{il} + C_{12} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} w_{kl} \quad (۳-۳) \\ & + C_{55} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_z} A_{ik}^{(x)} A_{jl}^{(z)} w_{kl} - P \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik}^{(x)} u_{kj} = -\rho \omega^2 u_{ij} \end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۶) در رابطه (۳-۱۵) مسئله مقدار ویژه به شکل کلی زیر نتیجه می شود:

$$([K] - \omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} \{U_d\} \\ \{W_d\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (17-3)$$

که

$$[K] = [K_{dd}] - [K_{db}] [K_{bb}]^{-1} [K_{bd}] \quad (17-3)$$

در روابط بالا [M] بیانگر ماتریس جرم و [K] بیانگر ماتریس سختی طبیعی می باشند.

#### ۴- بررسی نتایج و بحث

##### ۴-۱- خواص مکانیکی تیر مورد مطالعه

در این تحقیق از مس به عنوان ماتریس (رزین) و از تنگستن به عنوان الیاف استفاده شده است. خواص مکانیکی این دو ماده در جدول (۱) آمده است [۱۶].

جدول (۱) خواص مکانیکی مس به عنوان ماتریس (رزین) و از تنگستن

به عنوان الیاف

خواص مکانیکی	مس	تنگستن
$E(\text{GPa})$	۱۱۵	۴۰۰
$\nu$	۰/۳۱	۰/۲۸
$\rho(\text{Kg/m}^3)$	۸۹۶۰	۱۹۳۰۰

##### ۴-۲- بررسی درستی معادلات

برای بررسی درستی معادلات و روش حل مورد استفاده، یک تیر ارتوتروپیک با شرایط مرزی ساده در هر دو تکیه گاه در نظر گرفته شده است. از پارامترهای بی بعد زیر برای بار بحرانی و بسامد طبیعی تیر استفاده می گردد [۲۱].

$$P_{cr} = \frac{A \times \sigma}{p_c}, \quad A = B \times H, \quad p_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (1-4)$$

$\sigma$  بار بحرانی مستخرج از برنامه نوشته شده در متلب،  $P_{cr}$  بار بحرانی بی بعد،  $B$  ضخامت تیر و  $H$  عرض تیر می باشد.

جدول (۲) بسامد طبیعی اول را برای تیر تحت بار محوری با شرایط مرزی ساده به ازای تعداد گره ۱۷ در راستای طول

$$B_{jl}^{(x)} = \begin{cases} 2(A_{jl}^{(x)} A_{jl}^{(x)} - \frac{A_{jl}^{(x)}}{\xi_j - \xi_l}) \\ j, l = 1, \dots, N_x, l \neq j \\ -\sum_{\substack{l=1 \\ j \neq l}}^{N_x} B_{jl}^{(x)} \text{ for } j = l; j, l = 1, 2, \dots, N_x \end{cases} \quad (11-3)$$

به طور مشابه ضرائب وزنی در راستای  $z$  می تواند بدست آید.

$L_x$  طول دامنه در راستای  $x$  و  $N$  تعداد نقاط نمونه گیری در راستای مورد نظر می باشد.

$$M(\xi_j) = \prod_{l=1, l \neq j}^{N_x} (\xi_j - \xi_l) \quad (12-3)$$

$\xi_j$  و  $\zeta_j$  به ترتیب توزیع نقاط در راستای  $x$  و  $z$  را نشان می دهند.

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi(i-1)}{N_x - 1} \right) \right\}; \quad (13-3)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N_x$  and  $j = 1, 2, \dots, N_x$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi(j-1)}{N_z - 1} \right) \right\} \quad (14-3)$$

for  $i = 1, 2, \dots, N_x$  and  $j = 1, 2, \dots, N_z$

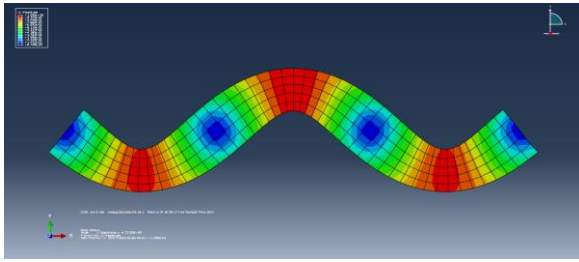
به منظور استخراج سیستم معادلات مقدار ویژه، متغیرها در تمام دامنه محاسباتی به دو بخش تقسیم می شوند. متغیرهای بخش اول شامل نقاط داخلی با زیرنویس  $d$  و متغیرهای باقی مانده که شامل متغیرها در مرزها می باشند با زیرنویس  $b$  اندیس گذاری می گردند.

با تعاریف بالا، معادلات حرکت را می توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود [۲۰]:

$$[K_{db}] \begin{Bmatrix} \{U_b\} \\ \{W_b\} \end{Bmatrix} + [K_{dd}] \begin{Bmatrix} \{U_d\} \\ \{W_d\} \end{Bmatrix} - \omega^2 [M] \begin{Bmatrix} \{U_d\} \\ \{W_d\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (15-3)$$

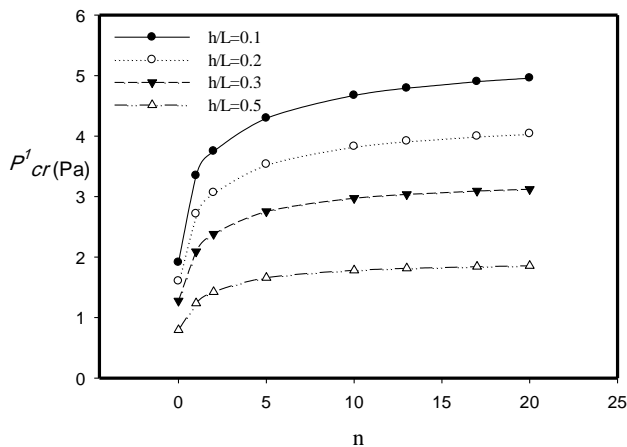
به طور مشابه شرایط مرزی را نیز می توان به فرم زیر نوشت:

$$[K_{bd}] \begin{Bmatrix} \{U_d\} \\ \{W_d\} \end{Bmatrix} + [K_{bb}] \begin{Bmatrix} \{U_b\} \\ \{W_b\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (16-3)$$



شکل (۵) مد سوم بار بحرانی کمانش تیر ( $P_{cr}=7/01588$  و  $h/L=0/1$ )

شکل (۶) تغییرات بار بحرانی اول کمانش تیر را به ازای تغییرات کسر حجمی و همچنین تغییرات ضخامت به طول نشان می دهد.



شکل (۶) تغییرات بار بحرانی اول کمانش بر حسب توان کسر حجمی الیاف برای تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف به ازای نسبتهای ضخامت به طول متفاوت

همان طور که مشخص است با افزایش کسر حجمی و نسبت ضخامت به طول بار بحرانی کمانش افزایش می یابد. در این قسمت از پارامترهای بی بعد زیر برای به دست آوردن بار بحرانی استفاده گردیده است [۲۱]:

$$P_{cr}^1 = \frac{A \times \sigma}{p_c}, \quad A = B \times H, \quad p_c = \frac{\pi^2 E_m I}{L^2} \quad (2-4)$$

حل معادلات دیفرانسیلی کوپل، به روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته در هر دو راستای طول و ضخامت تیر شبکه بندی صورت گرفته و تعداد گره ها در راستای طول با  $N_x$  و در راستای ضخامت با  $N_z$  نشان داده شده است. جهت بررسی همگرایی و دقت نتایج بار بحرانی کمانش برای تیر تحت بار محوری با شرایط مرزی ساده-ساده به ازای تعداد گره های

و ضخامت تیر و برای نسبت های ضخامت به طول متفاوت و مقایسه با مرجع [۲۱] را نشان می دهد.

جدول (۲) مقایسه ی بسامد طبیعی اول ( $\Omega$ ) بر حسب گیگاهرتز به ازای تئوری های مختلف برای تیر با شرایط مرزی ساده- ساده، شبکه بندی

۱۷×۱۷

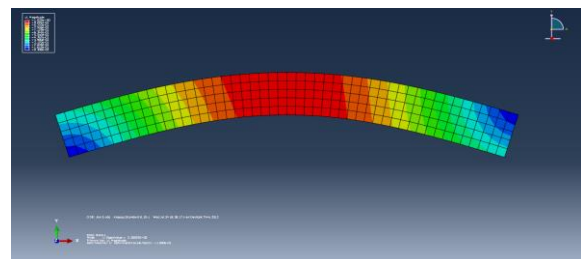
تئوری		
$h/L$	$0/2$	$0/1$
$7/4664$	$9/2902$	$9/7121$
$7/4664$	$9/2903$	$9/7121$
$9/8696$	$8/8696$	$8/8696$

نتایج حاصل بیانگر دقت عالی در نتایج بدست آمده از کار حاضر است.

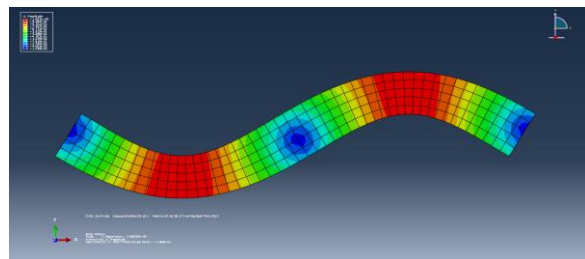
### ۳-۴- نتایج

#### ۳-۴-۱- بررسی کمانش و بار بحرانی کمانش

در شکل های (۳) تا (۵)، شکل مد اول تا سوم مربوط به بار بحرانی تیر با شرایط مرزی ساده و  $h/L=0/1$  که در نرم افزار ABAQUS به دست آمده است بیان می کند. المان به کار گرفته شده در آباکوس از نوع shell و S8R: An 8-node doubly curved thick shell, reduced integration واز ۲۵۰ المان برای مش بندی تیر استفاده شده است.



شکل (۳) مد اول بار بحرانی کمانش تیر ( $P_{cr}=0/96834$  و  $h/L=0/1$ )



شکل (۴) مد دوم بار بحرانی کمانش تیر ( $P_{cr}=3/54418$  و  $h/L=0/1$ )



۴-۳-۲- بررسی بسامدهای طبیعی تیر مورد مطالعه

در جدول (۵) مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از سه بسامد طبیعی اول با تیر ارتوتروپیک مطالعه شده در مرجع [۲۱] و نتایج نرم افزار ABAQUS ارائه شده است.

جدول (۶) سه بسامد طبیعی اول برای تیرتابعی مدرج یکسرگیردار تقویت شده با الیاف، درغیاب نیروی محوری، به ازای توان کسر حجمی مختلف و نسبت ضخامت به طول متفاوت را نشان می‌دهد.

مختلف در راستای طول و ضخامت تیر و برای نسبت های ضخامت به طول متفاوت را براساس روابط (۳۸) مطابق جدول (۳) بدست آمده و با مراجع [۲۱،۱۷] مقایسه شده است.

مقایسه نتایج بدست آمده از کار حاضر برای سه بار بحرانی کمانشی اول تیر ارتوتروپیک با نتایج بدست آمده در مرجع [۲۱] و همچنین نتایج تحلیلی نرم افزار ABAQUS به ازای نسبت ضخامت به طول متفاوت در جدول (۴) آورده شده اند.

جدول (۳) همگرایی و دقت نتایج بدست آمده از بار بحرانی کمانش بی‌بعد برای تیر تابعی مدرج با شرایط مرزی ساده-ساده

h/L	تعداد گره‌ها (Nx×Nz) برای روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته						مرجع [۱۷]	مرجع [۲۱]
	۷×۷	۹×۹	۱۱×۱۱	۱۳×۱۳	۱۵×۱۵	۱۷×۱۷		
۰/۱	۳/۹۵۸۳×۱۰ <sup>۱۶</sup>	۴/۰۴۶۶×۱۰ <sup>۹</sup>	۰/۹۶۸۳	۳/۹۵۸۳×۱۰ <sup>۱۶</sup>	۱/۲۳۷۱×۱۰ <sup>۱۷</sup>	۰/۹۶۸۳	۰/۹۶۸۳	
۰/۲	۱/۰۳۲۷×۱۰ <sup>۴</sup>	۲/۵۳۰۱×۱۰ <sup>۴</sup>	۰/۸۸۶۰	۳/۹۵۸۳×۱۰ <sup>۱۶</sup>	۰/۸۸۶۰	۰/۸۸۶۰	۰/۸۸۶۰	
۰/۵	۲۶۶/۲۸۹۲	۶۴۹/۴۲۲۷	۱/۴۰۵۷×۱۰ <sup>۳</sup>	۰/۵۷۲۳	۰/۵۷۲۳	۰/۵۷۲۳	۰/۵۷۲۳	

جدول (۴) مقایسه‌ی سه بار بحرانی اول بدست آمده از روش حاضر و مرجع [۲۱]

h/L	نوع بررسی	بار بحرانی کمانش اول	بار بحرانی کمانش دوم	بار بحرانی کمانش سوم
۰/۱	الاستیسیته دوبعدی	۰/۹۶۸۳	۳/۵۴۴۱	۷/۰۱۵۸
	تئوری مرتبه سوم برشی [۲۱]	۰/۹۶۸۳	۳/۵۴۴۲	۷/۰۱۵۹
	ABAQUS	۰/۹۵۷۳	۳/۵۵۳۹	۷/۲۱۴۶
۰/۲	الاستیسیته دوبعدی	۰/۸۸۶۰	۲/۶۸۴۰۸	۴/۳۸۶۴
	تئوری مرتبه سوم برشی [۲۱]	۰/۸۸۶۰	۲/۶۸۴۱	۴/۳۸۶۵
	ABAQUS	۰/۸۹۱۲	۲/۸۹۵۶	۴/۸۳۷۱
۰/۵	الاستیسیته دوبعدی	۰/۵۷۲۳	۱/۰۷۲۷	۱/۳۱۰۷
	تئوری مرتبه سوم برشی [۲۱]	۰/۵۷۲۳	۱/۰۷۲۸	۱/۳۱۰۷
	ABAQUS	۰/۶۱۲۷	۱/۲۵۶۴	۱/۹۴۳۲

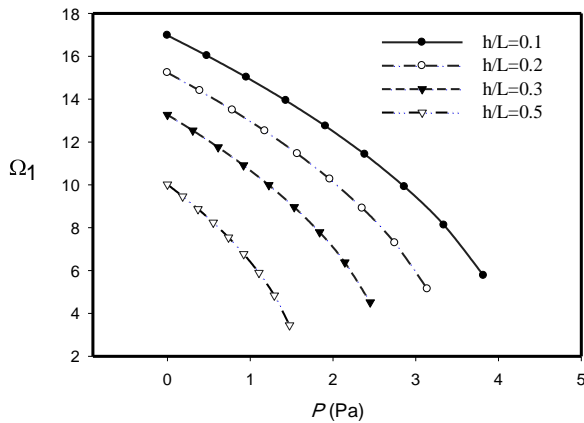
جدول (۵) مقایسه‌ی سه بسامد طبیعی اول بدست آمده از روش حاضر و مرجع [۲۱] و  $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_m A}{E_m I}}$

h/L	نوع بررسی	بسامد طبیعی اول	بسامد طبیعی دوم	بسامد طبیعی سوم
۰/۱	الاستیسیته دوبعدی	۹/۷۱۲۱	۳۷/۱۶۱۰	۷۸/۴۲۶۳
	تئوری مرتبه سوم برشی [۲۱]	۹/۷۱۲۱	۳۷/۱۶۱۰	۷۸/۴۲۶۴
	ABAQUS	۹/۶۵۲۶	۳۷/۸۳۲۷	۷۸/۷۵۸۴
۰/۲	الاستیسیته دوبعدی	۹/۲۹۰۲۵	۳۲/۳۳۹۱	۶۲/۰۱۲۵
	تئوری مرتبه سوم برشی [۲۱]	۹/۲۹۰۳	۳۲/۳۳۹۱	۶۲/۰۱۲۶
	ABAQUS	۹/۲۶۱۱	۳۲/۲۱۵۲	۶۲/۵۳۲۷
۰/۵	الاستیسیته دوبعدی	۷/۴۶۶۴	۲۰/۴۴۴۷	۳۳/۸۹۸۳
	تئوری مرتبه سوم برشی [۲۱]	۷/۴۶۶۴	۲۰/۴۴۴۸	۳۳/۸۹۸۳
	ABAQUS	۷/۴۶۲۲	۲۰/۴۳۷۷	۳۳/۸۶۱۵

جدول (6) سه بسامد طبیعی اول از تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف با شرایط مرزی گیردار\_آزاد به ازای نسبت ضخامت به طول متفاوت

و توان کسر حجمی الیاف متفاوت بدون بار محوری

$h/L=0.1$		$h/L=0.3$		$h/L=0.5$		توان کسر حجمی			
بسامد طبیعی سوم	بسامد طبیعی دوم	بسامد طبیعی اول	بسامد طبیعی سوم	بسامد طبیعی دوم	بسامد طبیعی اول				
21/09395	10/93156	9/13165	30/11613	18/19487	11/89714	54/48124	44/44269	14/85957	0
21/62666	12/6562	9/459499	31/35922	21/08558	12/641	63/19615	49/32993	16/41428	1
22/21637	12/99886	9/691934	32/10296	21/65297	12/87749	64/89086	50/24433	16/56547	2
22/97484	13/27871	10/01832	33/17031	22/11531	13/27195	66/26941	51/57992	16/97391	5
23/29595	13/38858	10/1734	33/69744	22/29781	13/51662	66/81526	52/70163	17/36763	10
23/36834	13/4152	10/21208	33/83208	22/34218	13/58876	66/94866	53/07663	17/50497	13
23/4239	13/43641	10/24354	33/94526	22/37782	13/65164	67/05536	53/41672	17/63102	17
23/45079	13/44686	10/25954	34/0027	22/39536	13/68484	67/10804	53/6001	17/6994	20

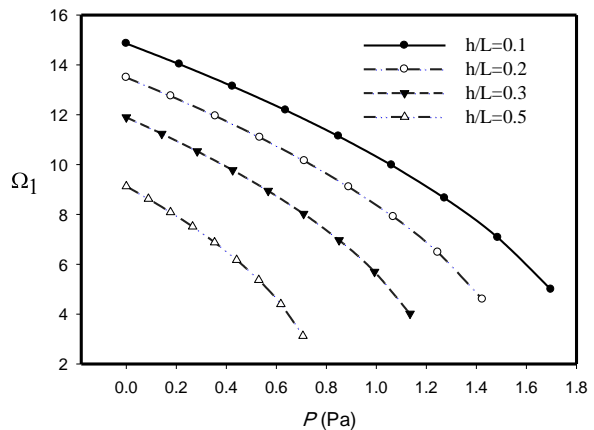


شکل (8) تغییرات بسامد طبیعی اول تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف بر حسب بار محوری وارده به ازای نسبتهای ضخامت به طول متفاوت،

$$n=5$$

تغییرات بسامد طبیعی اول به ازای بار محوری مختلف برای توان کسر حجمی متفاوت و نسبت ضخامت به طول مشخص و بار محوری که از بار بحرانی کمتر در نظر گرفته شده، در شکل های (9) و (10) نشان داده شده است.

تغییرات بسامد طبیعی اول به ازای بار محوری مختلف برای توان کسر حجمی مشخص و نسبت ضخامت به طول متفاوت و بار محوری که از بار بحرانی کمتر در نظر گرفته شده، در شکل های (7) و (8) نشان داده شده است.



شکل (7) تغییرات بسامد طبیعی اول تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف بر حسب بار محوری وارده به ازای نسبتهای ضخامت به طول متفاوت،

$$n=0$$

جدول (۸) همگرایی بسامدهای طبیعی به دست آمده به ازای تعداد نقاط

مختلف در راستای طولی و ضخامت تیر		
$n=1, h/L=0/2$	$n=1, h/L=0/2$	$N_x \times N_z$
$p=1/225077(Pa)$	$p=1/206572(Pa)$	
۱۰/۰۰۱۳۷	۱۰/۹۷۷۷۲	۷×۷
۹/۹۸۹۲۴	۱۰/۹۷۴۱۶	۹×۹
۹/۹۸۷۴۲۵	۱۰/۹۸۰۳۵	۱۱×۱۱
۹/۹۸۹۳۹۸	۱۰/۹۸۴۴۲	۱۳×۱۳
۹/۹۹۰۶۳۴	۱۰/۹۸۶۶۴	۱۵×۱۵
۹/۹۹۱۳۴۲	۱۰/۹۸۷۸۵	۱۷×۱۷
۹/۹۹۱۷۷۲	۱۰/۹۸۸۵۶	۱۹×۱۹

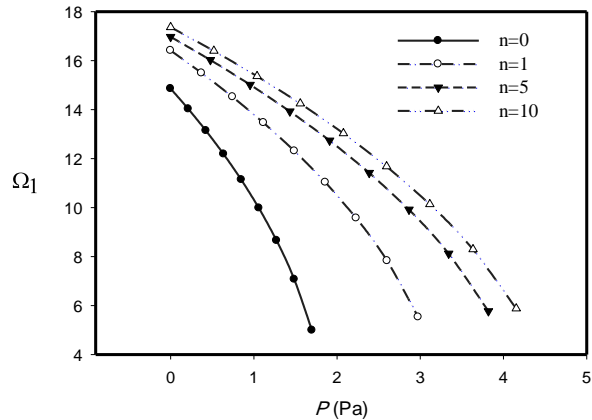
### ۵- نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی ارتعاش تیر یکسره گیردار تابعی مدرج اورتوتروپیک تحت بار محوری پرداخته شد. نتایج کلی به شرح زیر در این کار حاصل گردید:

(۱) روش عددی مربعات تفاضلی تعمیم یافته به کار گرفته شده در این کار دارای دقت و نرخ همگرایی بالایی می باشد.

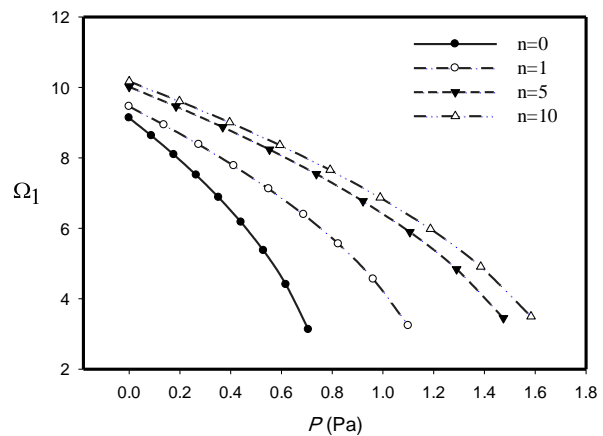
(۲) با افزایش توان کسر حجمی الیاف در تیر تابعی مدرج تحت بار محوری که دارای تغییرات خواص در راستای ضخامت

می باشد، بار بحرانی کمانش افزایش پیدا می کند که به ازای توان های کسر حجمی بالاتر تغییرات زیادی در بار بحرانی کمانش به ازای افزایش توان کسر حجمی الیاف مشاهده نمی شود و تقریباً ثابت باقی می ماند. این نتیجه در مورد بسامد طبیعی تیر تابعی مدرج بدون بار محوری نیز صادق است بدین صورت که با افزایش کسر حجمی الیاف، بسامد طبیعی تیر تابعی مدرج یکسره گیردار افزایش پیدا کرده و به ازای توان کسر حجمی بالا تغییرات زیادی در بسامد طبیعی به ازای افزایش توان کسر حجمی مشاهده نمی شود.



شکل (۹) تغییرات بسامد طبیعی اول تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف بر حسب بار محوری وارده به ازای توان کسر حجمی الیاف متفاوت،

$$h/L = 0/1$$



شکل (۱۰) تغییرات بسامد طبیعی اول تیر تابعی مدرج تقویت شده با الیاف بر حسب بار محوری وارده به ازای توان کسر حجمی الیاف

$$h/L = 0/5, \text{ متفاوت}$$

همان طور که از نتایج مشخص است با افزایش بار محوری فشاری بسامد طبیعی کاهش می یابد و با افزایش نسبت ضخامت به طول فرکانس طبیعی در محدوده بررسی شده کاهش می یابد.

همگرایی بسامد طبیعی اول گرفته شده از تیر یکسره گیردار تابعی مدرج تقویت شده با الیاف تحت بار محوری و توان کسر حجمی معلوم، به ازای تعداد گره های متفاوت در دو راستای طول و ضخامت تیر در جدول (۸) مشاهده می گردد.

- [2] Zhong Z., Shang E. T., Three-dimensional exact analysis of a simply supported functionally gradient piezoelectric plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, (20), 2003, pp. 5335- 5352.
- [3] Shavezipur M., Hashemi S.M., Free vibration of triply coupled centrifugally stiffened nonuniform beams, using a refined dynamic finite element method, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 13(1), 2009, pp. 59-70.
- [4] Jun Li., Chaoxing Shi., Xiangshao K., Xiaobin Li., Weiguo Wu., Free vibration of axially loaded composite beams with general boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory, *Composite Structures*, Vol. 97, 2013, pp.1-14.
- [5] Ke. Liao-Liang, Jie. Yang, S. Kitipornchai, Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams, *Composite Structures*, Vol. 92(3), 2010, pp .676-683.
- [6] Suddounga K., Charoensuka J., Vibration response of stepped FGM beams with elastically end constraints using differential transformation method, Vol. 77, 2014, pp. 20–28.
- [7] Aminbaghai M., Murín J., Kutiš V., Modal analysis of the FGM-beams with continuous transversal symmetric and longitudinal variation of material properties with effect of large axial force, *Engineering Structures*, Vol. 34, 2012, pp. 314–329.
- [8] Pradhan S.C., Murmu T., Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 321(1–2), 2009, pp. 342–362.

[۹] سوهانی، فاطمه، ایپکچی، حمیدرضا، بررسی ارتعاشات آزاد و کماتش تیر با خیز نسبتاً زیاد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۱۳، ۱۳۹۲، صفحه ۱۴-۱.

[۱۰] آزادی، محمد، زاهدی، فرشاد، دمیرچلی مهنوش، تحلیل ارتعاشات آزاد تیر FGM به روش اجزاء محدود با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما، ششمین کنفرانس سالانه دانشجویی مهندسی مکانیک، تهران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۷.

۳) با افزایش نسبت ضخامت به طول در محدوده بررسی شده تیر هدفمند، بار بحرانی کماتش و همچنین فرکانس طبیعی بی بعد تیر بدون بار بحرانی، کاهش پیدا می کند.

۴) بار محوری اعمال شده به تیر را تا محدوده ی بار بحرانی کماتش افزایش داده، که با افزایش بار محوری اعمال شده به تیر تابعی مدرج یکسر گیر دار، بسامد های طبیعی تیر تابعی مدرج تحت تاثیر قرار گرفته و کاهش پیدا می کند.

### فهرست علائم

$h$	ضخامت تیر (m)
$L$	طول تیر (m)
$E$	دانسیته
$\rho$	مدول یانگ ( $\text{kg/m}^3$ )
$G$	ضریب پواسون
$\nu$	مدول برشی
$\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}$	تنش ها
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xz}$	پارامترهای کرنش بر حسب جابجایی
$\Omega$	بسامد بی بعد
$\omega$	بسامد طبیعی
$P_{cr}$	بار بحرانی کماتش
$n$	توان کسر حجمی الیاف
$C_{ij}$	پارامترهای ماتریس سختی
$N_x, N_y$	تعداد گره ها در راستای طول و عرض شبکه بندی

$A_{ik}^{(x)}, A_{jl}^{(z)}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مرتبه اول

$B_{ik}^{(x)}, B_{jl}^{(z)}$  ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مرتبه دوم

### مراجع

- [1] Rao S. S., Sunar M., Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47(4), 1994, pp. 113-123.

- on two-parameter elastic foundations, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 32, 2008, pp. 1381-1394.
- [18] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, CRC Press, 2004, pp. 38-57.
- [19] Bert C.W., Malik M., Differential quadrature method in computational mechanics, *A review. Applied Mechanical Review*, Vol. 49 (1), 1996, pp. 1-27.
- [20] Malekzadeh P., Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 89 (3), 2009, pp. 367-373.
- [21] Matsunaga H., Vibration and buckling of deep beam-columns on two-parameter elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228(48), 1999, pp. 359-376.
- [۱۱] رجبی، کاوه، حسینی هاشمی، شاهرخ، کارگر نوین، محمدحسن، احمدی، بهمن، تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو از جنس ماده مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک تحت تاثیر حرکت بار متمرکز متحرک نوسانی، سومین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات، تهران، انجمن آکوستیک و ارتعاشات ایران، ۱۳۹۲.
- [۱۲] رحیمی، غلامحسین، طورانی، حسین، گازر، محمد سجاده، بررسی ارتعاشات تیر هدفمند دو جهته مقید در لایه‌های پیزوالکتریک روی بستر الاستیک با استفاده از ديفرانسیل کوادریچر، مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۹، ۱۳۹۲، صفحه ۶۸-۵۸.
- [۱۳] ستوده، علیرضا، قربانزاده، مرتضی، حل دوبعدی ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی هدفمند به کمک تئوری لایه ای و روش ديفرانسیل کوادریچر، هجدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، تهران، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه شریف، ۱۳۸۹.
- [14] Simsek M., Kocatürk T., Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load, *Composite Structures*, Vol. 90 (4), 2009, pp. 465-473.
- [۱۵] رفیعی پور، حسین، لطف آور، امیر، شلمزاری صغری، حمزه، تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیر هدفمند روی بستر الاستیک وینکلر-پسترناک تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با استفاده از روش تحلیلی هموتوبی، مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۱۲، ۱۳۹۱، صفحه ۱۰۱-۸۷.
- [16] Yas M.H., Sobhani Aragh B., Free vibration analysis of continuous grading fiber reinforced plates on elastic foundation, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48 (12), 2010, pp. 1881-1895.
- [17] Malekzadeh P., Karami G., A mixed differential quadrature and finite element free vibration and buckling analysis of thick beams