

حل مساله‌ی غیرخطی نوسانگرهای سخت شونده و نرم شونده با روش تجزیه‌ی آدومین

بهرام گل محمدی^۱، قاسم اسعدی کردشولی^{۲*}، علیرضا وحیدی^۳

* نویسنده مسئول: g.asadi@iausr.ac.ir

واژه‌های کلیدی

نوسانگرهای سخت شونده، نوسانگرهای نرم شونده، معادلات دیفرانسیل غیرخطی، روش تجزیه‌ی آدومین.

چکیده

یکی از عوامل ایجاد اثرات غیرخطی در سیستم‌های نوسانی، غیرخطی بودن تابع نیروی بازگرداننده است که طیف وسیعی از آن‌ها با تابع چندجمله‌ای درجه سه و انتخاب ضرایب مناسب مدل‌سازی می‌شوند. در این مقاله یک سیستم نوسانگر جرم - فنر تحت تاثیر چنین نیروی بازگرداننده‌ای در نظر گرفته شده و دو دسته پارامتر طوری انتخاب شده‌اند که معادلات حرکت دو نوسانگر سخت شونده و نرم شونده از کاربرد قانون دوم نیوتن به دست آیند. این معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دو ابتدا با استفاده از روش تجزیه‌ی آدومین حل شده‌اند. در مرحله‌ی بعد ابتدا معادلات به دستگاه معادلات مرتبه یک تبدیل و سپس مجدداً با روش آدومین حل شده‌اند. با توجه به این که طرف دوم معادلات دیفرانسیل حل شده، برابر با صفر است، برای مقایسه‌ی نتایج، پاسخ‌ها در معادله قرار گرفته و انحراف آن‌ها از صفر به عنوان خطا در نظر گرفته شده‌است. مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهد که روش به کار رفته برای هر دو مساله از دقت مناسب برخوردار است و همچنین تبدیل معادله به دستگاه معادلات مرتبه‌ی پایین تر منجر به حصول پاسخ‌های دقیق‌تر می‌شود.

۱- مربی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سلماس

۲- مربی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری

۳- استادیار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر ری

۱- مقدمه

اگر یک جرم نقطه‌ای تحت تاثیر نیروی بازگرداننده‌ی یک فنر قرارگیرد، حرکت نوسانی انجام می‌دهد. این نیرو تابعی از تغییر طول فنر نسبت به جایگاه تعادلی آن است. مشتق این تابع نسبت به جابجایی، سختی فنر نامیده می‌شود. در تقریب خطی فنر، نیروی بازگرداننده با تغییر طول آن نسبت به طول آزاد متناسب است. این تناسب قانون هوک نامیده می‌شود و فرضی است که برای ساده سازی مساله‌ی نوسانگر در نظر گرفته می‌شود. در عمل مواد ارتجاعی و فنرهای ساخته شده از قانون هوک تبعیت نمی‌کنند و می‌توان تابعی غیرخطی را برای رفتار نیروی بازگرداننده‌ی آنها تنظیم کرد که ثابت‌های آن در آزمایشگاه تعیین می‌شوند. اگر نیروی بازگرداننده به شکل تابعی غیرخطی از تغییر طول فنر انتخاب شود، معادله‌ی دیفرانسیل حاصل از کاربرد قانون دوم نیوتن که دینامیک سیستم را توصیف می‌کند، واقعی‌تر خواهد بود. در شرایطی که سختی فنر ثابت نیست، اگر سختی با انحراف از جایگاه تعادلی افزایش یابد سیستم را نوسانگر سخت شونده و اگر کاهش یابد، سیستم را نوسانگر نرم شونده می‌نامند. هر دو گونه نوسانگر نام برده، غیر خطی هستند.

روش تجزیه‌ی آدومین روشی بسیار کارا و مؤثر برای حل تقریبی انواع معادلات و دستگاههای خطی و غیر خطی در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی مثل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرال و معادلات جبری است. در این روش جواب معادله به صورت یک سری نامتناهی در نظر گرفته می‌شود که معمولاً به سرعت به جواب واقعی مسأله همگرا می‌شود. در این روش توابع تحلیلی غیرخطی موجود در معادله، مانند آنچه در اغلب معادله‌های مربوط به مسائل فیزیکی و مهندسی وجود دارد، به صورت یک سری تجزیه‌ای از چند جمله‌ایهای آدومین در نظر گرفته می‌شوند. جرج آدومین (۱۹۹۶-۱۹۲۰) در سال ۱۹۸۱ این روش تجزیه را برای حل معادلات عملگری خطی تصادفی ارائه کرد. کلیات مباحث مطرح شده توسط وی در قالب یک

مجموعه‌ی مدون برای اولین بار در سال ۱۹۸۳ به چاپ رسید [۱]. توسعه‌ی روش توسط وی ادامه یافت به طوری که در سال‌های ۱۹۸۳ تا ۱۹۹۴ سه اثر برجسته‌ی بعدی را به جای گذاشت [۲ تا ۴]. این روش بعداً به نام خودش منسوب شد. همگرایی روش توسط آدومین و ریاضی‌دان فرانسوی، ی. شقو اثبات شده است [۵ و ۶].

پژوهشگران در مقالات متعددی روش آدومین را برای حل معادلات دیفرانسیل به کار برده و آن را با سایر روش‌های کلاسیک مقایسه کرده‌اند. بابلیان و همکاران روش آدومین را برای حل معادلات دیفرانسیل به کار بردند [۷ و ۸]. وزواز از روش اصلاح شده‌ی آدومین برای حل معادله‌ی توماس-فرمی استفاده کرد [۹]. در گزارش دیگری این روش را با روش حل با کمک سری‌ها مقایسه کرد [۱۰]. بلومو و صرافیان روش آدومین را با روش تکرار پیکارد مقایسه کردند [۱۱]. وحیدی و همکاران این روش را برای تحلیل معادلات دیفرانسیل معمولی [۱۲]، نوسانگر واداشته‌ی میرا [۱۳]، نوسانگر غیرخطی دافینگ [۱۴ و ۱۵] و نوسانگر غیرخطی دافینگ-واندرپل [۱۶] به کار برده و نتایج را با دقت مناسب به دست آورده‌اند. اخیراً کاربردهای جدیدی از روش آدومین در تحلیل حرکت سیالات [۱۷]، مسائل مقدار اولیه [۱۸]، ارتعاشات نانو تیوب‌ها [۱۹]، معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌ی غیر صحیح [۲۰] و ارتعاشات جسم صلب [۲۱] گزارش شده است.

در این مقاله روش آدومین برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی توصیف کننده‌ی نوسانگرهای نرم شونده و سخت شونده [۲۲] به کار رفته است. اختار این مقاله به این صورت است که در بخش‌های ۲ و ۳ روش تجزیه به ترتیب برای حل فرم عمومی معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی و دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تشریح شده است. در بخش ۴ نوسانگرهای غیرخطی سخت شونده و نرم شونده تشریح و معادلات دیفرانسیل دینامیکی آنها معرفی شده‌اند. بخش ۵ به مثال‌ها و حل آنها اختصاص دارد. در بخش ۶ نتایج ارائه شده و مورد بحث قرار گرفته‌اند.

در نظر گرفته می شوند که A_i ها به صورت زیر تعریف شده و چند جمله ای های آدومین نامیده می شوند.

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\lambda^i} N \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} x_i \lambda^i \right)$$

با استفاده از (۳) و (۴)، معادله (۲) به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) = f(t) - L^{-1} R \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) - L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \quad (5)$$

با انتخاب $x(t) = f(t)$ در (۵)، رابطه ی بازگشتی زیر به دست می آید.

$$x_{k+1}(t) = L^{-1} R x_k(t) - L^{-1} A_k(t), k \geq 0 \quad (6)$$

پس از محاسبه ی x_0, x_1, \dots با استفاده از (۶) تقریب دلخواه n جمله ای $\varphi_n(t)$ برای جواب $x(t)$ این گونه به دست می آید.

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(t) \quad (7)$$

که در آن $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = x(t)$

۳- روش تجزیه برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی

اکثر مسائل فیزیکی با معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دو یا بالاتر توصیف می شوند. این معادلات را می توان مستقیماً یا پس از تبدیل به دستگاه معادلات مرتبه ی پایین تر، با روش آدومین حل کرد. در این بخش روش آدومین برای حل دستگاه معادلات مرتبه ی n تشریح می شود.

فرم کلی یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n به صورت زیر است.

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (8)$$

شرایط اولیه ی این معادله نیز فرم کلی زیر را دارد.

$$x^{(n)}(0) = x_{0n}$$

این معادله با انتخاب $x^{(i)}(t) = y_{i+1}(t)$ به یک دستگاه معادلات شامل n معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی یک به شکل زیر تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} y'_1(t) &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2(t) &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n(t) &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (9)$$

در مقاله ی حاضر، روش آدومین به کار رفته که هیچ فرضی برای ساده سازی مدل ریاضی مساله های مورد بحث نیاز ندارد و بنابراین توصیفی بسیار نزدیک به واقعیت از سیستم های مورد بررسی به دست می آید و از این دیدگاه قابل توجه است. از طرفی پاسخ مساله به صورت چند جمله ای به دست می آید که برخلاف روشهای عددی برای رسیدن به چنین پاسخی، درون یابی و خطای وابسته به آن را در بر ندارد. بعلاوه تاثیر تبدیل معادله ی دیفرانسیل مرتبه دو به دستگاه معادلات مرتبه یک به عنوان دیدگاهی مفید در حل مسائل غیرخطی بررسی شده است.

۲- روش تجزیه برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی

فرم کلی معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n غیرخطی در بازه ی $a \leq t \leq b$ به صورت زیر است.

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (1)$$

که شرایط اولیه ای به صورت زیر برای آن در نظر می گیریم.

$$x(a) = \alpha, \quad x^{(1)}(a) = \alpha_1, \dots,$$

$$x^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}.$$

برای به دست آوردن جواب تقریبی این معادله با استفاده از روش تجزیه، آن را به شکل عملگری

$$Lx(t) + Rx(t) + Nx(t) = g(t)$$

که در آن $L = \frac{d^n}{dt^n}(\cdot)$ و $Rx(t)$ و $Nx(t)$ به ترتیب معرف جملات

خطی و غیرخطی موجود در معادله به فرم عملگری و $g(t)$ تابعی معلوم بر حسب t است که جمله ی تحریک نامیده می شود. با استفاده از عملگر معکوس L ,

$$L^{-1} = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t (\cdot) dt dt \dots dt$$

داریم:

$$x(t) = -L^{-1} Rx(t) - L^{-1} Nx(t) + f(t) \quad (2)$$

که فرم کانونیک آدومین نامیده می شود و در آن $f(t)$ از تاثیر عملگر L^{-1} بر $g(t)$ و اعمال شرایط اولیه ی مساله به دست می آید. در روش آدومین تابع جواب به صورت

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) \quad (3)$$

جمله های غیرخطی به صورت

$$Nx(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \quad (4)$$

توابع مختلفی را بر آن‌ها منطبق کرد. یکی از این توابع به صورت زیر است.

$$R(x) = ax + bx^n \quad (15)$$

که در آن a, b, n ثابتهای وابسته به جنس و ساختار فنر و نوع ماده‌ی ارتجاعی هستند. سختی فنر یا ماده‌ی ارتجاعی به صورت زیر تعریف شده است.

$$S(x) = \frac{dR(x)}{dx} \quad (16)$$

اگر $S(x)$ با x افزایش یابد، نوسانگر سخت شونده و اگر کاهش یابد نوسانگر نرم شونده نامیده می‌شود.

معادله‌ی حرکت یک جرم نقطه‌ای تحت تاثیر نیروی بازگرداننده‌ی (۱۵)، به صورت زیر است.

$$\ddot{x} = -(ax + bx^n) \quad (17)$$

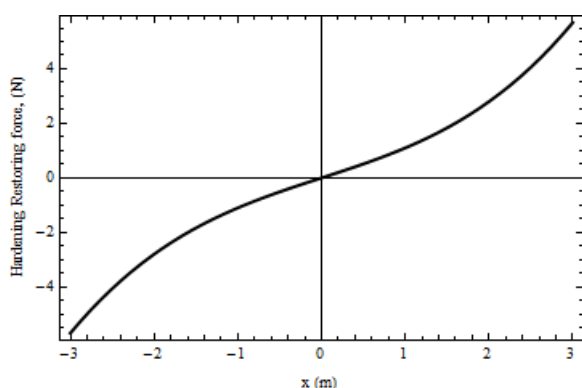
که در آن m جرم نوسان کننده و \ddot{x} مشتق دوم مکان نسبت به زمان است.

۴-۱- نوسانگر سخت شونده

نیروی بازگرداننده‌ی (۱۵) و سختی وابسته به آن با انتخاب $a = 1, b = 0.1$ و $n = 3$ عبارتند از

$$\begin{aligned} R(x) &= x + 0.1x^3 \\ S(x) &= 1 + 0.3x^2 \end{aligned} \quad (18)$$

که نمودارهای آن‌ها بر حسب x در شکل‌های (۱) و (۲) رسم شده‌است.



شکل (۱) نیروی بازگرداننده‌ی (۱۸) بر حسب انحراف از تعادل.

که در آن هر معادله، مشتق مرتبه‌ی اول یک تابع را به صورت نگاشتی وابسته به متغیرهای مستقل y_i و n تابع ناشناخته‌ی f_i نشان می‌دهد.

با تعریف اپراتور O به عنوان مشتق مرتبه‌ی اول نسبت به t ، معادله‌ی i ام دستگاه معادلات (۹) به شکل $Oy_i(t) = f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ در می‌آید و با اعمال معکوس این اپراتور، $(O^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt)$ ، به فرم کانونیک آدومین زیر تبدیل می‌شود.

$$y_i(t) = y_i(0) + \int_0^t L_i(t, y_1, \dots, y_n) dt + \int_0^t N_i(t, y_1, \dots, y_n) dt \quad (10)$$

که در آن L_i و N_i قسمت‌های خطی و غیرخطی تابع f_i هستند. برای اعمال روش آدومین، با انتخاب

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_{ij}(t) \quad (11)$$

$$L_i(t, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} y_{kj}(t) \quad (12)$$

$$N_i(t, y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}(f_{i0}, \dots, f_{ij}) \quad (13)$$

و قرار دادن (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) در (۱۰) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} y_{ij} &= y_i(0) + \int_0^t \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} y_{kj} dt \\ &+ \int_0^t \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}(f_{i0}, \dots, f_{ij}) dt \end{aligned}$$

که از آن با انتخاب $y_{i0} = y_i(0)$ ، رابطه‌ی بازگشتی زیر به دست می‌آید.

$$(14)$$

$$y_{ij+1} = \int_0^t \sum_{k=1}^n a_{kj} y_{kj} dt + \int_0^t A_{ij}(f_{i0}, \dots, f_{ij}) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

این فرایند به دستگاهی از معادلات انتگرال ولترا نوع دوم منتهی می‌شود که همگراست و با استفاده از آن می‌توان تقریب چند جمله‌ای با تعداد جملات دلخواه از (۱۱) را محاسبه کرد.

۴-۲ نوسانگرهای غیر خطی سخت شونده و نرم شونده

هرگاه انحراف سیستم از حالت تعادل، یک نیروی بازگرداننده به وجود آورد، حرکت نوسانی ایجاد می‌شود. اگر نیروی بازگرداننده تابعی خطی از مقدار انحراف از تعادل باشد، قانون هوک برقرار است و پاسخ سیستم به صورت نوسانگر هارمونیک به دست می‌آید. در عمل فنرها و مواد ارتجاعی مصنوعی رفتار غیرخطی دارند و می‌توان

شکل (۴) نشان می‌دهد که با افزایش x ، سختی کاهش می‌یابد و به همین دلیل نوسانگر وابسته به آن را نرم‌شونده می‌نامند.

۵- مثال‌ها و حل آن‌ها

۵-۱- حل مستقیم مساله‌ی نوسانگر سخت‌شونده

فرض کنید جرم $m = 1\text{kg}$ تحت تاثیر نیروی بازگرداننده‌ی (۱۸) با شرایط اولیه‌ی

$$\dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 1,$$

قرار بگیرد. با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادله‌ی حرکت این سیستم به صورت زیر است

$$\ddot{x}(t) = -x(t) - 0.1x^3(t) \quad (20)$$

برای حل با روش آدومین، اپراتور $L = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot)$ تعریف و (۲۰) به فرم اپراتوری زیر نوشته می‌شود.

$$Lx(t) = -x(t) - 0.1x^3(t) \quad (21)$$

پس از اعمال اپراتور معکوس $L^{-1} = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$ ، نتیجه می‌شود

$$L^{-1}Lx(t) = -L^{-1}x(t) - 0.1L^{-1}x^3(t) \quad (22)$$

و محاسبه‌ی سمت چپ معادله‌ی (۲۲) همراه با اعمال شرایط اولیه‌ی مساله، نتیجه می‌دهد.

$$x(t) = 1 - \int_0^t \int_0^t x(t) dt dt - 0.1 \int_0^t \int_0^t x^3(t) dt dt. \quad (23)$$

با استفاده از (۳) و (۴) و انتخاب $x_0(t) = 1$ رابطه‌ی بازگشتی زیر برای $i = 1, 2, \dots$ به دست می‌آید.

$$x_{i+1}(t) = - \int_0^t \int_0^t x_i(t) dt dt - 0.1 \int_0^t \int_0^t A_i(t) dt dt \quad (24)$$

اکنون با تکرار (۲۴) می‌توان هر تقریب دلخواه φ_n از (۷) را به عنوان پاسخ تقریبی (۲۰) به دست آورد. با انتخاب $n = 10$ در (۷) و استفاده از (۲۴) نتیجه می‌شود

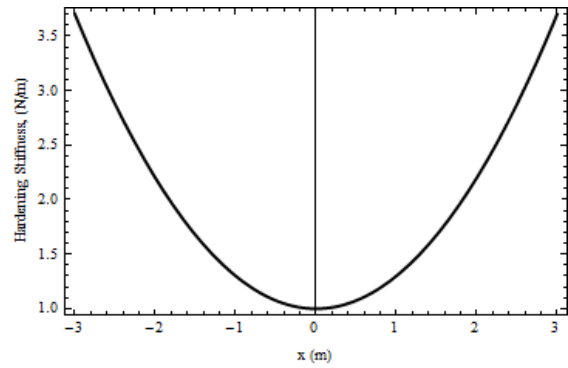
$$(25)$$

$$\varphi_{10}(t) = 1 - 0.55t^2 + 0.0595t^4 - 0.0056t^6 + \dots + 3.2109 \times 10^{-9}t^{20}$$

که تقریبی چندجمله‌ای با درجه‌ی ۲۰ برای پاسخ معادله‌ی (۲۰) است.

اگر $x(t)$ پاسخ دقیق معادله‌ی دیفرانسیل (۲۰) باشد، آنگاه

$$\ddot{x}(t) + x(t) + 0.1x^3(t) = 0 \quad (26)$$



شکل (۲) نمودار سختی بر حسب انحراف از تعادل برای نیروی (۱۸).

همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، با افزایش x ، سختی افزایش می‌یابد و به همین دلیل نوسانگر وابسته به آن را نوسانگر سخت‌شونده می‌نامند.

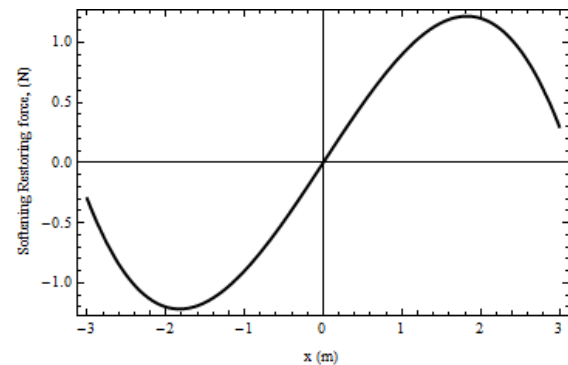
۴-۲- نوسانگر نرم‌شونده

نیروی بازگرداننده‌ی (۱۵) و سختی وابسته به آن با انتخاب $a = 1, b = -0.1$ عبارتند از

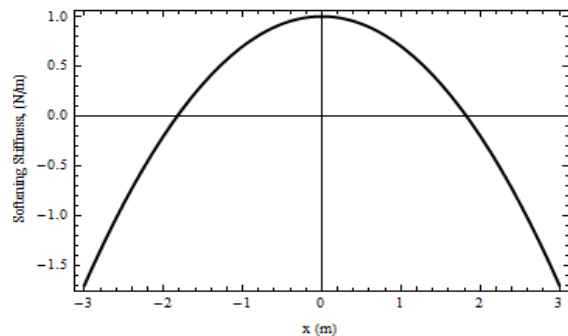
$$R(x) = x - 0.1x^3 \quad (19)$$

$$S(x) = 1 - 0.3x^2$$

نمودارهای نیروی بازگرداننده‌ی (۱۹) و سختی وابسته به آن بر حسب انحراف از تعادل در شکل‌های (۳) و (۴) رسم شده‌است.



شکل (۳) نیروی بازگرداننده‌ی (۱۹) بر حسب انحراف از تعادل.



شکل (۴) نمودار سختی بر حسب انحراف از تعادل برای نیروی (۱۹).

هر تقریب دلخواه از (۱۱) به عنوان پاسخ تقریبی (۲۸) و (۲۹) با استفاده از (۳۴) و (۳۵) قابل محاسبه است.

با انتخاب $z = 20$ در (۱۱) پاسخ تقریبی (۳۶)

$$\varphi_{1,20}(t) = 1 - 0.55t^2 + 0.0595t^4 - 0.0056t^6 + \dots + 3.0148 \times 10^{-9}t^{20}$$

به دست می‌آید که با پاسخ به دست آمده از حل مستقیم (۲۰) هم درجه است.

۵-۳- حل مستقیم مساله‌ی نوسانگر نرم شونده

جرم $m = 1kg$ را در نظر بگیرید که تحت تاثیر نیروی بازگرداننده‌ی (۱۹) قرار دارد و در $t = 0s$ دارای شرایط $\dot{x}(0) = 0, x(0) = 1$ ، است.

با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادله‌ی دیفرانسیل زیر بر این سیستم حاکم است.

$$\ddot{x}(t) = -x(t) + 0.1x^3(t) \quad (37)$$

معادله‌ی (۳۷) تنها در علامت جمله‌ی دوم سمت راست با (۲۰) تفاوت دارد، بنابراین با اعمال این تغییر در فرایند حل (۲۰) که در بخش ۵-۱ ارائه شد، رابطه‌ی بازگشتی زیر برای پاسخ (۳۷) به دست می‌آید.

(۳۸)

$$x_{i+1}(t) = -\int_0^t \int_0^t x_i(t) dt dt + 0.1 \int_0^t \int_0^t A_i(t) dt dt$$

با انتخاب $n = 10$ در (۳۷)، پاسخ تقریبی چندجمله‌ای زیر برای (۳۷) به دست می‌آید.

(۳۹)

$$x(t) \cong \varphi_{10}(t) = 1 - 0.45t^2 + 0.0262t^4 + 0.0014t^6 + \dots - 1.2897 \times 10^{-10}t^{20}$$

این پاسخ نیز از درجه‌ی ۲۰ است.

۵-۴- حل مساله‌ی نوسانگر نرم شونده پس از تبدیل به دستگاه معادلات

با انتخاب $y_1(t) = x(t)$ ، $y_2(t) = \dot{x}(t)$ معادله‌ی (۳۷) به دستگاه معادلات مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود.

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \quad (40)$$

$$\dot{y}_2(t) = -y_1(t) + 0.1y_1^3(t) \quad (41)$$

اما اگر $\varphi_n(x)$ به عنوان پاسخ تقریبی (۲۰) در (۲۶) قرار گیرد، آنگاه

$$e_n(t) = \ddot{\varphi}_n(t) + \varphi_n(t) + 0.1\varphi_n^3(t) \neq 0 \quad (27)$$

هر چه مقدار $e_n(t)$ در یک زمان خاص به صفر نزدیکتر باشد، پاسخ تقریبی در آن زمان دقیق‌تر است. بنابراین از $e_n(t)$ به عنوان معیاری برای خطای پاسخ تقریبی در بازه‌ی زمانی موردنظر استفاده شده است. این معیار در بخش ۶ برای سنجش دقت پاسخ‌های تقریبی تمام مثال‌های حل شده مورد استفاده قرار گرفته است.

۵-۲- حل مساله‌ی نوسانگر سخت شونده پس از تبدیل به دستگاه معادلات

با انتخاب $y_1(t) = x(t)$ و $y_2(t) = \dot{x}(t)$ معادله‌ی (۲۰) به دستگاه معادلات مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود.

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \quad (28)$$

$$\dot{y}_2(t) = -y_1(t) - 0.1y_1^3(t) \quad (29)$$

که شرایط اولیه‌ی آن عبارت است از $y_1(0) = 1$ و $y_2(0) = 0$

با تعریف اپراتور O به عنوان مشتق مرتبه اول نسبت به t ، نتیجه می‌شود

$$Oy_1(t) = y_2(t) \quad (30)$$

$$Oy_2(t) = -y_1(t) - 0.1y_1^3(t) \quad (31)$$

معادلات (۳۰) و (۳۱) پس از اعمال معکوس اپراتور $O^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ ، O با اعمال شرایط اولیه‌ی مساله، به شکل زیر بازنویسی می‌شوند.

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t y_2(t) dt \quad (32)$$

$$y_2(t) = -\int_0^t y_1(t) dt - 0.1 \int_0^t y_1^3(t) dt \quad (33)$$

با استفاده از (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) و انتخاب $y_{10}(0) = 1$ و $y_{20}(0) = 0$ روابط بازگشتی زیر از (۳۲) و (۳۳) به دست می‌آیند.

$$y_{1i+1}(t) = \int_0^t y_{2i}(t) dt \quad (34)$$

(۳۵)

$$y_{2i+1}(t) = -\int_0^t y_{1i}(t) dt - 0.1 \int_0^t A_i(x^3) dt$$

که شرایط اولیهی آن عبارت است از $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$. به طور مشابه با آنچه در ۲-۵ گفته شد، روابط بازگشتی زیر به دست می آیند.

$$y_{1i+1}(t) = \int_0^t y_{2i}(t) dt$$

$$y_{2i+1}(t) = - \int_0^t y_{1i}(t) dt - 0.1 \int_0^t A_i(x^3) dt \quad (42)$$

که با تکرار آن پاسخ های تقریبی معادلات (۴۰) و (۴۱) با دقت دلخواه به دست می آید. به عنوان نمونه با انتخاب $z = 20$ در (۱۱) نتیجه می شود.

$$\varphi_{1,20}(t) = 1 - 0.45 t^2 + 0.0262 t^4 + 0.0014 t^6 + \dots - 1.1939 \times 10^{-10} t^{20} \quad (43)$$

که با پاسخ حاصل از حل مستقیم (۳۷) هم درجه است.

۶- نتایج و بحث

در این بخش برای مقایسه ی دقیق تر تاثیر روش حل و تعداد تکرار بر زمان محاسبات و دقت پاسخ ها، نتایج حاصل از دو روش برای مساله ی (۲۰) در جدول های ۱ و ۲ ارائه شده است. منظور از درجه، بالاترین توان پاسخ چند جمله ای به دست آمده به ازای تعداد تکرار بیان شده در ستون اول است. جدول های (۱) و (۲) نشان می دهند که با توجه به همگرایی، در هر دو روش با افزایش تعداد تکرار پاسخ ها دقیق تر می شوند. تبدیل معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دو به دستگاه معادلات مرتبه ی یک، زمان محاسبه ی پاسخ توسط برنامه ی کامپیوتری را کاهش و دقت را افزایش داده است.

جدول (۱) نتایج حاصل از حل مستقیم مساله ی نوسانگر سخت شونده در تعداد تکرارهای متفاوت

درجه	زمان (ثانیه)	خطا در ثانیه ی یکم	تکرار
۶	۰/۱۵۶	$3/643 \times 10^{-2}$	۳
۸	۰/۲۳۴	$7/995 \times 10^{-3}$	۴
۱۰	۰/۲۵۰	$1/450 \times 10^{-3}$	۵
۱۲	۰/۳۲۸	$2/499 \times 10^{-4}$	۶
۱۴	۰/۳۹۰	$4/193 \times 10^{-5}$	۷
۱۶	۰/۴۳۶	$6/772 \times 10^{-6}$	۸
۱۸	۰/۴۹۹	$1/060 \times 10^{-6}$	۹
۲۰	۰/۵۶۱	$1/627 \times 10^{-7}$	۱۰

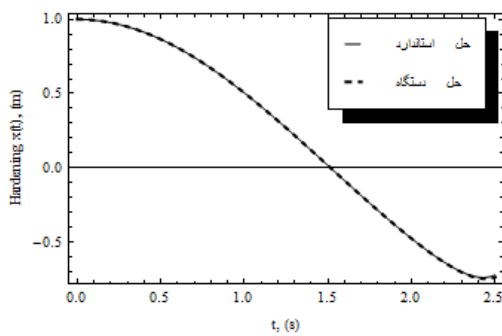
از آنجا که در روش های عددی با دور شدن از ابتدای بازه ی حل مساله، دقت پاسخ ها کاهش می یابد، مقادیر خطا در

جدول (۲) نتایج حاصل از حل مساله ی نوسانگر سخت شونده پس از

تبدیل به دستگاه معادلات در تعداد تکرارهای متفاوت

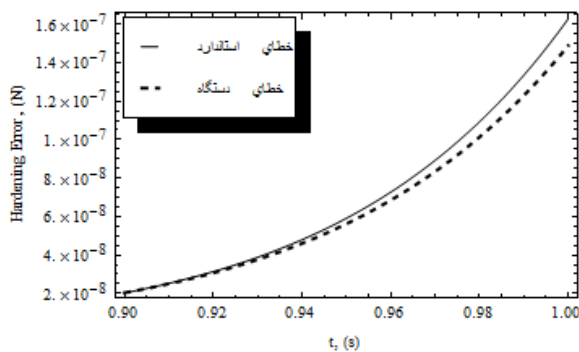
درجه	زمان (ثانیه)	خطا در ثانیه ی یکم	تکرار
۶	۰/۱۵۶	$3/643 \times 10^{-2}$	۶
۸	۰/۱۸۷	$7/995 \times 10^{-3}$	۸
۱۰	۰/۲۶۶	$1/450 \times 10^{-3}$	۱۰
۱۲	۰/۳۱۲	$2/499 \times 10^{-4}$	۱۲
۱۴	۰/۳۹۰	$4/193 \times 10^{-5}$	۱۴
۱۶	۰/۴۲۱	$6/772 \times 10^{-6}$	۱۶
۱۸	۰/۴۸۴	$1/000 \times 10^{-6}$	۱۸
۲۰	۰/۵۳۱	$1/488 \times 10^{-7}$	۲۰

برای مشاهده ی تاثیر تبدیل معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دو به دستگاه معادلات مرتبه ی یک پاسخ های (۲۵) و (۳۶) در یک دستگاه مختصات در شکل (۵) رسم شده اند.

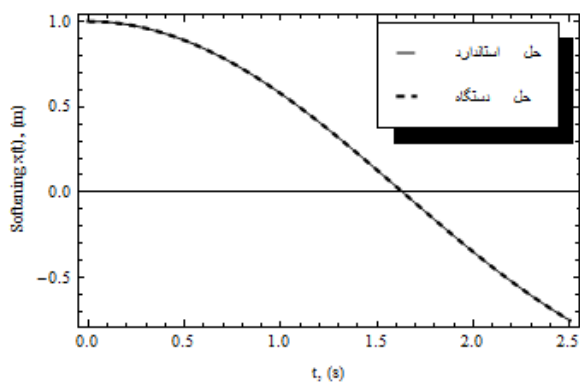


شکل (۵) نمودار پاسخ تقریبی (۲۵) و (۳۶) بر حسب t در بازه ی $[0, 2.5]$.

در شکل (۵) مشاهده می شود که در ابتدای بازه، پاسخ ها بر هم منطبق هستند و با افزایش زمان از هم فاصله می گیرند. شکل (۶) تابع $e(t)$ را برای (۲۵) و (۳۶) نشان می دهد.

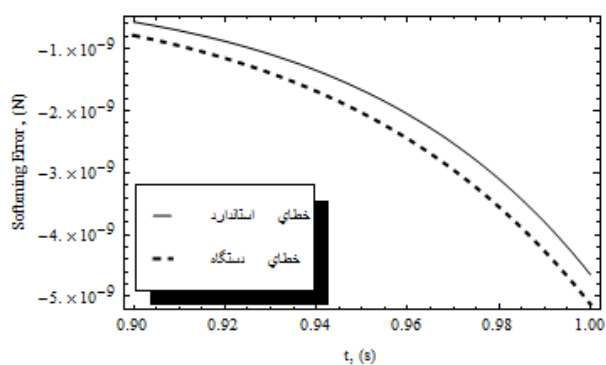


شکل (۶) خطای (۳۶) خط چین و (۲۵) خط پر در بازه ی $[0.9, 1]$.



شکل (۷) نمودار پاسخ تقریبی φ_{10} بر حسب t در بازه‌ی $[0, 2.5]$.

نمودار $e_{10}(t)$ بر حسب t در بازه‌ی $[0, 2]$ در شکل (۸) رسم شده‌است.



شکل (۸) نمودار $e_{10}(t)$ بر حسب t در بازه‌ی $[0.9, 1]$.

نتایج نشان داد که با حل مستقیم مساله‌های نوسانگر غیرخطی سخت شونده و نرم شونده به ازای تعداد تکرار مشخص n یک پاسخ چندجمله‌ای مرتبه‌ی n به دست می‌آید در حالی که اگر معادله به یک دستگاه معادلات شامل دو معادله‌ی مرتبه‌ی یک تبدیل شود، برای به دست آوردن پاسخ چندجمله‌ای درجه‌ی n باید $2n$ تکرار انجام شود و زمان محاسبه توسط کامپیوتر کاهش می‌یابد. از طرفی با افزایش تعداد تکرار در هر دو روش، دقت پاسخ تقریبی و زمان محاسبه‌ی صرف شده توسط کامپیوتر افزایش می‌یابد. پس از تبدیل معادله به دستگاه معادلات مرتبه‌ی پایین‌تر، روش آدومین در زمان کوتاه‌تری به پاسخ می‌رسد. گرچه این کاهش زمان ناچیز است اما پاسخ‌های حاصل دقیق‌تر است. بنابراین برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دو نوسانگر سخت شونده و نرم شونده‌ی غیرخطی، تبدیل به دستگاه معادلات مرتبه یک و اعمال روش آدومین پیشنهاد می‌شود.

در شکل (۶) مشخص است که با تبدیل معادله‌ی مرتبه‌ی ۲ نوسانگر سخت شونده به دستگاه معادلات مرتبه‌ی ۱ و حل آن با روش آدومین، خطا در انتهای بازه به صفر نزدیک‌تر و دقت روش بیشتر می‌شود. نتایج حل معادله‌ی (۳۷) و دستگاه معادلات معادل آن، (۴۰) و (۴۱)، در جدول‌های ۳ و ۴ نشان می‌دهند که برای مساله‌ی نرم شونده نیز افزایش تعداد جملات پاسخ تقریبی، دقت پاسخ‌ها را افزایش می‌دهد.

جدول (۳) نتایج حاصل از حل مستقیم مساله‌ی نوسانگر نرم شونده در

تعداد تکرارهای متفاوت

درجه	زمان (ثانیه)	خطا در ثانیه‌ی یکم	تکرار
۶	۰/۱۵۶	$1/576 \times 10^{-2}$	۳
۸	۰/۲۰۳	$1/703 \times 10^{-3}$	۴
۱۰	۰/۲۸۱	$5/249 \times 10^{-5}$	۵
۱۲	۰/۲۹۷	$3/328 \times 10^{-5}$	۶
۱۴	۰/۳۴۳	$3/339 \times 10^{-6}$	۷
۱۶	۰/۴۶۸	$1/178 \times 10^{-7}$	۸
۱۸	۰/۵۱۵	$4/448 \times 10^{-8}$	۹
۲۰	۰/۵۶۲	$4/643 \times 10^{-9}$	۱۰

جدول ۴ نتایج حاصل از حل مساله‌ی نوسانگر نرم شونده پس از تبدیل

به دستگاه معادلات در تعداد تکرارهای متفاوت

درجه	زمان (ثانیه)	خطا در ثانیه‌ی یکم	تکرار
۶	۰/۱۵۶	$1/576 \times 10^{-2}$	۶
۸	۰/۲۳۴	$1/703 \times 10^{-3}$	۸
۱۰	۰/۲۵۰	$5/249 \times 10^{-5}$	۱۰
۱۲	۰/۳۲۸	$3/328 \times 10^{-5}$	۱۲
۱۴	۰/۳۹۰	$3/339 \times 10^{-6}$	۱۴
۱۶	۰/۴۳۶	$3/380 \times 10^{-8}$	۱۶
۱۸	۰/۴۹۹	$4/035 \times 10^{-8}$	۱۸
۲۰	۰/۵۶۱	$5/123 \times 10^{-9}$	۲۰

مقایسه‌ی جداول ۳ و ۴ نشان می‌دهد که برای نوسانگر نرم شونده نیز تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل درجه ۲ به دستگاه معادلات درجه ۱ زمان محاسبه‌ی پاسخ توسط برنامه‌ی کامپیوتری را کاهش و دقت در $t = 1s$ را افزایش داده است. برای مشاهده‌ی این نتایج، پاسخ‌های (۳۹) و (۴۴) در یک دستگاه مختصات در شکل (۷) رسم شده است. در شکل (۷) مشخص است که کاربرد روش آدومین پس از تبدیل معادله‌ی مرتبه‌ی دو به دستگاه معادلات مرتبه‌ی یک، به پاسخ‌های دقیق‌تری منتهی می‌شود.

- [6] Cherruault Y., Adomian G., Decomposition method: A new proof of convergence, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 18(12), 1993, pp. 103-106.
- [7] Babolian E., Biazar J., Solving Concrete Examples by Adomian Method, *Application mathematics And Computation*, Vol. 135, 2003, pp. 161-167.
- [8] Babolian E., Vahidi A.R., Asadi Cordshooli Gh., Solving differential equations by decomposition Method, *Application mathematics And Computation*, Vol. 167, 2005, pp. 1150-1155.
- [9] Wazwaz A.M., The modified decomposition method and Pade approximations for solving Thomas Fermi equations, *Application mathematics And Computation*, Vol. 105, 1999, pp. 11-19.
- [10] Wazwaz A.M., A comparison between Adomian decomposition method and Taylor series metod in the series solution, *Application mathematics And Computation*, Vol. 97, 1998, pp. 37-44.
- [11] Bellomo N., Sarafyan D., On a Comparison between Adomian's Decomposition Method and Picard Iteration, *Journal Mathematics and Analysis Application*, Vol. 123, 1987, pp. 389-400.
- [12] Vahidi A.R., Asadi Cordshooli Gh., Modifying Adomian Decomposition Method for Ordinary Differential Equations, *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 3(10), 2006, pp. 49-54.
- [13] Vahidi A.R., Asadi Cordshooli Gh., Azimzadeh Z., Comparing numerical methods for the solution of the damped forced oscillator problem, *Iranian Journal of Optimization*, Vol. 2, 2009, pp. 1-12.
- [14] Vahidi A.R., Babolian E., Asadi Cordshooli Gh., Samiee F., Restarted Adomian's Decomposition Method for Duffing's Equation, *International Journal of Mathematics Analysis*, Vol. 3(15), 2009, pp. 711-717.
- [15] Vahidi A.R., Babolian E., Asadi Cordshooli Gh., Numerical solutions of Duffing's oscillator problem, *Indian Journal Physics*, Vol. 86(4), 2012, pp. 311-315.
- [16] Asadi Cordshooli Gh., Vahidi A.R., Solutions of Duffing - van der Pol equation using Decomposition Method, *Adv. Studies Theorist Physics*, Vol. 5(3), 2011, pp. 121-129.
- [17] Siddiqui A.M., Hameed M., Siddiqui B.M., Ghorri Q.K., Use of Adomian decomposition method in the study of parallel plate flow of a third grade fluid, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15(9), 2010, pp. 2388-2399.
- [18] Wu Guo-cheng, Adomian decomposition method for non-smooth initial value problems, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 54(9-10), 2011, pp. 2104-2108.

فهرست علائم

x, y	مکان
(n)	مرتبه‌ی مشتق
t	زمان
F	تابع
L	اپراتور بالاترین مرتبه‌ی مشتق
R	اپراتور خطی
N	اپراتور غیر خطی
g	تابع تحریک
A	چندجمله‌ای آدومین
λ	متغیر کمکی در بسط
φ	پاسخ چندجمله‌ای تقریبی
O	اپراتور مشتق مرتبه‌ی اول
f	تابع نامشخص
$R(x)$	نیروی وابسته به مکان
S	ضریب سختی عامل نوسان
e	تابع خطای وابسته به مکان

تشکر و قدردانی

این مقاله با حمایت دانشگاه آزاد اسلامی واحد سلماس تهیه و تدوین شده است و بدینوسیله از حوزه‌ی معاونت پژوهشی این واحد دانشگاهی قدردانی می‌شود.

مراجع

- [1] Adomian G., *Applied Stochastic Processes*, Academic Press, 1983.
- [2] Adomian G. Bellman R., *Partial Differential Equations*, D. Reidel Publishing Co., 1985.
- [3] Adomian G., "Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics", Kluwer, 1989.
- [4] Adomian G., *Solving Frontier Problems of physics: The Decomposition Method*, Kluwer, 1994.
- [5] Cherruault Y., Convergence of Adomian's method, *Kybernetes*, Vol. 9 (2), 1988, pp. 31-38.

- [19] Sweilam N.H., Khader M.M., Approximate solutions to the nonlinear vibrations of multiwalled carbon nanotubes using Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217 (2), 2010, pp. 495-505.
- [20] Duan J., Chaolu T., Rach R., Solutions of the initial value problem for nonlinear fractional ordinary differential equations by the Rach–Adomian–Meyers modified decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218(17), 2012, pp. 8370-8392.
- [21] Mao Qibo, Free vibration analysis of multiple-stepped beams by using Adomian decomposition method, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 54, (1-2), 2011, pp. 756-764.
- [22] Srinivasan P., Nonlinear Mechanical Vibrations, New Age International Publishers, 2008.